Marches aléatoires symétriques discrètes

Dans ce problème, on modélise le déplacement d'une particule sur un axe. On suppose qu'elle est initialement à l'abscisse 0 et qu'à chaque instant, elle avance ou recule d'une unité. En particulier, son abscisse est un entier.

Pour la modélisation mathématique, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définie sur cet espace. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n prend uniquement les valeurs -1 et 1 et sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

La variable aléatoire X_n modélise le mouvement de la particule entre l'instant $n-1$ et l'instant n : la valeur 1 indique un avancement, la valeur -1 indique un recul.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note S_n la position de la particule à l'instant n. En particulier, la variable aléatoire S_0 vaut 0 et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la position S_n est donnée par

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k.$$

Pour tout ω de Ω, on définit $\mathrm{T}(\omega)$ comme étant le plus petit entier n strictement positif pour lequel $\mathrm{S}_n(\omega)$ est nul (c'est-à-dire le premier instant où la particule revient à l'origine) si un tel entier existe ; si la particule ne revient jamais en l'origine, alors on pose $\mathrm{T}(\omega) = 0$.

Dans ce problème, on prouve que T est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on détermine sa loi.

Partie 1

Question 1. Pour tout t dans $]-1, 1[$, prouver l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{t^n}{4^n}.$$

Question 2. Pour tout x dans $]-1, 1[$, prouver l'égalité

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Partie 2

Question 3. Exprimer l'ensemble $[\mathrm{T} = 0]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires S_n. En déduire que $[\mathrm{T} = 0]$ est un événement.

Question 4. De même, prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'ensemble $[\mathrm{T} = n]$ est un événement.

On a alors prouvé que T est une variable aléatoire.

Partie 3

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{Y}_n = (\mathrm{X}_n + 1)/2$. On pose également $\mathrm{U}_n = \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_n$.

Question 5. Vérifier que Y_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.

Question 6. En déduire la loi de S_n. En particulier, donner la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)$.

Partie 4

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on introduit l'événement $\mathrm{F}_n = [\mathrm{T} > n] \cup [\mathrm{T} = 0]$. Dans notre modélisation, cet événement signifie que la particule n'est pas revenue en l'origine entre l'instant 1 et l'instant n.

Question 7. Dans cette question, on fixe n dans $\mathbb{N}^*$ puis k dans $[\![0, n-1]\!]$. Prouver l'égalité

$$\mathbb{P}([\mathrm{S}_k = 0] \cap [\mathrm{S}_{k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [\mathrm{S}_n \neq 0]) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0)\mathbb{P}(\mathrm{F}_{n-k}).$$

Question 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0)\mathbb{P}(\mathrm{F}_{n-k}) = 1.$$

Question 9. En déduire l'identité

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{F}_n)x^n\right) = \frac{1}{1-x}.$$

Question 10. En déduire l'identité

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{F}_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Question 11. Dans cette question, on détermine la loi de T.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_{n-1}) - \mathbb{P}(\mathrm{F}_n).$$

b. Pour tout x dans $[0,1[$, en déduire l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

c. En déduire une expression de $\mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$ valable pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

d. Prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{T} = 0)$ vaut 0. Autrement dit, la particule revient presque sûrement à l'origine au cours du processus.

e. La variable aléatoire T est-elle d'espérance finie ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(\mathrm{T})$.

Partie 5

On souhaite simuler l'expérience modélisée ci-dessus au moyen d'un programme Python. On suppose donnée une fonction `xn()` qui simule la loi des X_n. À titre indicatif, un code possible pour créer une telle fonction est le suivant

```python
import random as rd

def xn():
    return rd.choice((-1, 1))
```

Question 12. Écrire une fonction `simuleT()` qui simule l'expérience décrite ci-dessus et renvoie la valeur de la variable aléatoire T.

Question 13. Écrire une fonction `compteRetoursEnZero(m)` qui prend en paramètre d'entrée un entier naturel m strictement positif, puis simule $2m$ étapes du processus décrit ci-dessus et renvoie le nombre d'indices k compris entre 1 et m vérifiant l'égalité $S_{2k} = 0$.

Partie 6

Pour tout entier m strictement positif et tout ω de Ω, on note

$$R_m(\omega) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1, m]\!] \ ; \ S_{2k}(\omega) = 0\}.$$

La variable aléatoire R_m compte le nombre de retours en l'origine au cours des $2m$ premières étapes du processus. C'est la variable aléatoire qui a été simulée informatiquement à la question 13. On considère que R_0 est égale à 0.

Question 14. Déterminer la loi de R_1 et calculer son espérance.

Question 15. Déterminer la loi de R_2 et vérifier que son espérance vaut $7/8$

Question 16. Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, donner sans justification l'univers image $R_m(\Omega)$. En déduire que la variable aléatoire R_m est d'espérance finie. On note r_m son espérance.

Le but des questions qui suivent est d'obtenir une expression explicite de r_m. Pour cela, on introduit les fonctions R et S définies par

$$R(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} r_m x^m \qquad \text{et} \qquad S(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 2m) x^m.$$

Question 17. Justifier que les fonctions R et S sont définies au moins sur $[0, 1[$. Donner de plus une expression de $S(x)$.

Question 18. Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout ℓ dans $[\![1, m]\!]$, prouver la relation

$$\mathbb{P}(R_m = \ell) = \sum_{k=1}^{m-\ell+1} \mathbb{P}(T = 2k)\mathbb{P}(R_{m-k} = \ell - 1).$$

Question 19. Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Prouver la relation

$$r_m = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2k) + \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2k) r_{m-k}.$$

Question 20. Pour tout x dans $[0, 1[$, en déduire l'égalité

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{S}(x)}{1-x} + \mathrm{R}(x)\mathrm{S}(x)$$

puis

$$\mathrm{R}(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}} - \frac{1}{1-x}.$$

Question 21. Obtenir finalement l'expression

$$r_m = \frac{m+1}{2}\binom{2m+2}{m+1}\frac{1}{4^m} - 1.$$

Question 22. À l'aide de la formule de Stirling, obtenir un équivalent simple de r_m quand m tend vers $+\infty$.

Partie 7

Question 23. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{F}_{2k+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_{2k})$.

Question 24. Pour tout x dans $[0, 1[$, en déduire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{F}_{2k}) x^{2k} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

puis obtenir une expression de $\mathbb{P}(\mathrm{F}_{2k})$.

Question 25. Soit m dans $\mathbb{N}^*$.

a. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{F}_{2m}) = 2\mathbb{P}([\mathrm{S}_1 > 0] \cap \ldots \cap [\mathrm{S}_{2m} > 0])$.

b. Prouver l'égalité $\mathbb{P}([\mathrm{S}_1 > 0] \cap \ldots \cap [\mathrm{S}_{2m} > 0]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([\mathrm{X}_2 \geqslant 0] \cap \cdots \cap [\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3 + \cdots + \mathrm{X}_{2m} \geqslant 0])$.

c. En déduire l'égalité $\mathbb{P}([\mathrm{S}_1 \geqslant 0] \cap \ldots \cap [\mathrm{S}_{2m} \geqslant 0]) = \binom{2m}{m} 4^{-m}$.

Question 26. Prouver que l'événement « L'abscisse de la particule ne change jamais de signe. » est de probabilité nulle.

Question 27. Pour tout a dans $\mathbb{Z}$, on note M_a l'événement « L'abscisse de la particule est minorée et son minimum est a. »

a. Pour tout a dans $\mathbb{Z}$, prouver que M_a est de probabilité nulle.

b. En déduire que la trajectoire de la particule est presque sûrement non minorée.

Commentaire. On prouverait de la même façon que la trajectoire de la particule est presque sûrement non majorée. On en déduit en particulier qu'avec probabilité 1, l'abscisse de la particule change de signe une infinité de fois. On peut même en déduire qu'avec probabilité 1, la particule passe une infinité de fois par toutes les abscisses : on dit que cette marche aléatoire est *récurrente*.