

Exercice 1. Fonction d'Airy ()**

Dans ce problème, on étudie certaines solutions de l'équation différentielle (E) suivante

$$y'' = xy. \quad (1)$$

Première partie
I. Solutions de (E) développables en série entière

a. Montrer qu'il existe une unique solution A de (E) telle que $A(0) = 1$ et $A'(0) = 0$.

Montrer de même qu'il existe une unique solution B de (E) telle que $B(0) = 0$ et $B'(0) = 1$.

b. Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ une fonction développable en série entière avec un rayon de convergence $R > 0$.

Quelles conditions (nécessaires et suffisantes) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ doit-elle satisfaire pour que la fonction y soit solution sur $] -R, R[$ de l'équation différentielle (E) ?

c. Montrer que les fonctions A et B sont développables sur $\mathbb{R}$ en série entière. On écrira ces fonctions sous la forme

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{3n} \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{3n+1},$$

où l'on exprimera les coefficients a_n et b_n à l'aide de n et des nombres α_n et β_n définis par $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad \beta_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(n + \frac{1}{3}\right).$$

d. On note Δ l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et donner une base de Δ .

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère Y une solution non identiquement nulle de (E) sur $] -\infty, 0[$.

On se propose d'étudier les zéros de Y. Pour cela, on va comparer cette fonction à la fonction Z définie sur $] -\infty, 0[$ par

$$\forall x \in] -\infty, 0[, \quad Z(x) = (-x)^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right).$$

II.1. Équation différentielle vérifiée par Z

Montrer que Z vérifie sur $] -\infty, 0[$ l'équation différentielle $Z'' = \left(x + \frac{5}{16x^2}\right) Z$.

II.2. Comparaison de Y et Z

a. Soient x_0 et x_1 dans $] -\infty, 0[$, avec $x_0 < x_1$. Démontrer l'égalité suivante

$$\left[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x) \right]_{x_0}^{x_1} = \frac{5}{16} \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y(t)Z(t)}{t^2} dt.$$

b. On suppose que x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de la fonction Z sur $] -\infty, 0[$ et que la fonction Y reste strictement positive sur $]x_0, x_1[$. Montrer que $\left[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x) \right]_{x_0}^{x_1}$ a le même signe que Z sur l'intervalle $]x_0, x_1[$.

c. En déduire que si x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de Z, alors Y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]x_0, x_1[$.

Montrer que la fonction Y possède une infinité de zéros dans l'intervalle $] -\infty, 0[$.

Troisième partie

III.1. Espace vectoriel des solutions de (E) bornées sur $]0, +\infty[$

- a. Montrer que les solutions A et B de (E) ne sont pas bornées sur $]0, +\infty[$.
- b. En déduire que le sous-espace des solutions de (E) qui sont bornées sur $]0, +\infty[$ est de dimension 1 au plus.
- Dans ce qui suit, on obtient une telle solution bornée, et on l'étudie en $+\infty$.

III.2. Transformation de (E) sur $]0, +\infty[$

Soit y une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on pose $y(x) = z(x) \cdot \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$.
Montrer que la fonction z est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle suivante

$$(E_2) \quad z'' - 2\sqrt{x}z' - \frac{1}{2\sqrt{x}}z = 0.$$

III.3. Étude d'une solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$

Pour tout $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3) dt$.

- a. Prouver la convergence absolue de l'intégrale $I(x)$ pour tout $x > 0$.
- b. Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.
- c. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $I'(x) = - \int_0^{+\infty} t \exp(-\sqrt{x}t^2) \sin(t^3/3) dt$.
- d. Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle (E_2) .

III.4. Expression intégrale des solutions bornées de (E) sur $]0, +\infty[$

- a. Montrer que la fonction $y : x \mapsto I(x) \cdot \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- b. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction y définie ci-dessus. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble des solutions de (E) bornées sur $]0, +\infty[$?

III.5. Étude du comportement de I en $+\infty$

- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2n} du = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!} \sqrt{\pi}$.

On pourra admettre cette égalité dans le cas $n = 0$.

- b. Pour tout u réel, prouver la majoration $1 - \cos(u) \leq u^2/2$.

- c. En déduire une majoration de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2) |\cos(t^3/3) - 1| dt$ puis obtenir un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. ()** Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on pose

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}} \quad \text{et} \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}} dt.$$

a. Calculer $K(x)$.

b. Montrer que la fonction $I : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le développement asymptotique $J(x) = -\ln(|x|) + 2\ln(2) + o_{x \rightarrow 0}(1)$.

Exercice 3. ()** Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n.$$

1. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. Prouver que $\mathbb{P}(A)$ est nul.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente. On veut prouver que $\mathbb{P}(A)$ vaut 1.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on introduit l'événement $I_p = \bigcap_{n \geq p} \overline{A_n}$.

a. Pour tout $x \geq 0$, prouver l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit un entier $r \geq p$. Prouver l'inégalité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{r \geq n \geq p} \overline{A_n}\right) \leq \exp\left(-\sum_{r \geq n \geq p} \mathbb{P}(A_n)\right)$.

c. En déduire que I_p est de probabilité nulle.

d. Conclure. (On a alors démontré le *lemme de Borel-Cantelli*.)

Exercice 4. (*)** Soit φ une fonction définie, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

1. On considère une fonction f solution de (E) sur $[0, +\infty[$ et on suppose que f est bornée.

a. Prouver que la fonction f'' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire que la fonction f' possède une limite en $+\infty$ puis prouver que cette limite est nulle.

2. Soient f et g deux solutions de (E) sur $[0, +\infty[$. On introduit la fonction

$$W = fg' - f'g,$$

appelée *wronskien* du couple (f, g) .

a. Prouver que la fonction W est constante.

b. On suppose que f et g sont bornées. Prouver que la fonction W est nulle puis en déduire que les fonctions f et g sont proportionnelles.

3. Prouver que l'équation différentielle (E) possède des solutions non bornées.