Les calculatrices sont interdites

N.B.: Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

La partie III est indépendante des deux premières.

PARTIE I

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_0(x) = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x+k).$$

I.1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $P_n(m)$ à l'aide de factorielles.

Soit α un nombre réel qui n'est pas un nombre entier strictement négatif.
On définit la fonction f_α de la variable réelle x par :

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}.$$

I.2. Montrer que f_α est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

I.3. On considère l'équation différentielle linéaire homogène en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(E_\alpha) \qquad xy''(x) + (2\alpha+1)y'(x) + xy(x) = 0.$$

I.3.1. Montrer que f_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$.

I.3.2. Réciproquement, soit y une solution de (E_α), paire, et développable en série entière de la variable x au voisinage de $x = 0$. Exprimer y en fonction de f_α et $y(0)$.

On suppose à présent, et jusqu'à la fin de la partie I de ce problème, que $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

I.4. Soit g_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x).$$

I.4.1. Montrer que g_α est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

I.4.2. En comparant les limites à droite en 0 de f_α et g_α, montrer que ces fonctions sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

En déduire la solution générale de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

I.4.3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ à valeurs réelles.

Montrer que y est solution de (E_α) sur $]-\infty, 0[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

En déduire la solution générale de (E_α) sur $]-\infty, 0[$.

I.5. Soit j_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $j_\alpha(x) = x^\alpha f_\alpha(x)$.

I.5.1. Montrer que j_α est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(B_\alpha) \qquad x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0.$$

Que peut-on dire de $j_{-\alpha}$?

I.5.2. En déduire la solution générale de (B_α) sur $]0, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 0[$.

PARTIE II

Dans cette partie, α désigne un nombre réel strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$.
On définit la fonction h_α de la variable réelle x par :

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos xt \, dt.$$

II.1. Montrer que h_α est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

II.2.

II.2.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x h''_\alpha(x) + x h_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} x \cos xt \, dt$.

II.2.2. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que h_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$.

II.3. Montrer que h_α est développable en série entière de x sur $\mathbb{R}$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha) x^{2n}}{(2n)!},$$

où $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} t^{2n} \, dt$.

II.4. Exprimer h_α en fonction de $h_\alpha(0)$ et f_α.

II.5. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de $I_n(\alpha)$ en fonction de n, $P_n(\alpha)$ et $I_0(\alpha)$.

PARTIE III

Soit $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles x et y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. On lui associe la fonction $\tilde{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{F}(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

On note ΔF le *laplacien* de F, défini par $\Delta F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

III.1. Montrer que pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ on a :

$$\Delta F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

On se propose de déterminer les fonctions F non identiquement nulles telles que $\tilde{F}$ soit de la forme $\tilde{F}(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ et que $\Delta F + \omega^2 F = 0$, où ω est un nombre réel positif ou nul, et f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

III.2. Soient F, $\tilde{F}$, f et g vérifiant les conditions ci-dessus.

III.2.1. Montrer que g est 2π-périodique.

III.2.2. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait simultanément :

$$(i) \qquad \forall r \in]0,+\infty[, \quad r^2 f''(r) + r f'(r) + (r^2\omega^2 - \lambda) f(r) = 0,$$

$$(ii) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0.$$

III.2.3. Déduire de la question III.2.1. que le nombre réel λ est nécessairement de la forme $\lambda = p^2$, avec $p \in \mathbb{N}$.

III.2.4. En déduire la forme générale de g.
On distinguera le cas où $p = 0$ et le cas où $p \neq 0$.

III.3. On suppose dans cette question que $\omega = 0$.

III.3.1. Déterminer la forme générale de f dans le cas où $p = 0$.

III.3.2. Déterminer la forme générale de f dans le cas où $p \neq 0$.
On pourra commencer par chercher les fonctions f qui sont de la forme $f(r) = r^\alpha$.

III.4. On suppose dans cette question que $\omega \neq 0$.
Soit f_1 la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_1(r) = f\left(\dfrac{r}{\omega}\right)$.
Montrer que f_1 est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(B_p) \qquad r^2 y''(r) + r y'(r) + (r^2 - p^2) y(r) = 0.$$

Fin de l'énoncé