

Mines - Ponts PSI 2017

Matrices symplectiques

1. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$

${}^t J = -J$. J est inversible avec $J^{-1} = -J = {}^t J$.

(en particulier, $J \in O_{2n}$)
mais ce n'est pas demandé

2. ${}^t J J = I_{2n}$ donc ${}^t J J J = J$ donc $J \in Sp_{2n}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$Jk(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t k(\alpha) Jk(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J$$

donc $k(\alpha) \in Sp_{2n}$.

3. Soit $U \in G_n$.

$$JL_U = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^t U^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^t U^{-1} \\ U & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t L_U J L_U = \begin{pmatrix} {}^t U & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -{}^t U^{-1} \\ U & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J \text{ donc } L_U \in Sp_{2n}.$$

4. Soit $M \in Sp_{2n}$. $\det({}^t M J M) = \det(J)$
donc $\det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) \in \{\pm 1\}$.
Mais la question est mal posée : on ne peut pas prouver que 1 et -1 sont des valeurs possibles puisque la partie III sert à prouver que $\det(M) = 1$.

5. Soient M et N dans Sp_{2n} .

$${}^t(MN) J(MN) = {}^t N ({}^t M J M) N = {}^t N J N = J$$

donc $MN \in Sp_{2n}$.

6] Soit $M \in \text{Sp}_{2n}$. $\det(M) = \pm 1$ donc M est inv.
 ${}^t M J M = J$ ~~inv~~ $\Rightarrow$ ~~M^{-1}~~ donc ${}^t M^{-1} ({}^t M J M) M^{-1} = {}^t M^{-1} J M^{-1}$
 donc $J = {}^t M^{-1} J M^{-1}$ donc $M^{-1} \in \text{Sp}_{2n}$.

7] Soit $M \in \text{Sp}_{2n}$. ${}^t M J M = J \xrightarrow{\text{inv}} M^{-1} J^{-1} M^{-1} = J^{-1}$
 or $J^{-1} = -J$ donc $M^{-1} J {}^t M^{-1} = J$ donc ${}^t M^{-1} \in \text{Sp}_{2n}$
 donc ${}^t M \in \text{Sp}_{2n}$ (avec 6).

8] $JM = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$
 ${}^t M J M = \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^t A C + {}^t C A & -{}^t A D + {}^t C B \\ -{}^t B C + {}^t D A & -{}^t B D + {}^t D B \end{pmatrix}$
 ${}^t M J M = J \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t A C = {}^t C A & ({}^t A C \text{ est sym}) \\ {}^t B D = {}^t D B & ({}^t B D \text{ est sym}) \\ {}^t D A - {}^t B C = I_n \end{cases}$

9] I_{2n} et $-I_{2n}$ sont dans Sp_{2n} d'après 3 (avec $U = I_n$ puis $U = -I_n$).
 De plus, elles commutent bien sûr avec toutes les matrices.

10] ${}^t L = K(-1)$ donc ${}^t L \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{Q})$ donc $L \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{Q})$.
 Donc $LM = ML$.
 $LM = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix}$
 $M L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix}$ donc $C=0$ et $A=D$.
 De même, ${}^t L M = M {}^t L$. ${}^t L M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+C & B+D \end{pmatrix}$
 $M {}^t L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ C+D & D \end{pmatrix}$ donc $B=0$.
 Finalement, $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ donc $\det(A)^2 \in \{\pm 1\}$ donc $\det(A)^2 = 1$ donc A est inv.

11] $L_U M = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^t U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U A & 0 \\ 0 & {}^t U^{-1} A \end{pmatrix}$ et $M L_U = \begin{pmatrix} A U & 0 \\ 0 & A {}^t U^{-1} \end{pmatrix}$
 donc $A U = U A$.

12 | Soit $(i,j) \in [1,n]^2$. Si $i \neq j$, $\det(I_n + E_{i,j}) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$

Si $i = j$, $\det(I_n + E_{i,j}) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Dans tous les cas, $I_n + E_{i,j} \in G_n$ donc $I_n + E_{i,j}$ commute avec A .

donc $E_{i,j}$ commute avec A .

$$A E_{i,j} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \boxed{C_i(A)} & \bigcirc \end{pmatrix}$$

j

$$E_{i,j} A = \begin{pmatrix} \bigcirc \\ \boxed{L_j(A)} \\ \bigcirc \end{pmatrix} i$$

$$C_i(A) = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} i$$

$$L_j(A) = (a_{1,j} \dots a_{i,j} \dots a_{n,j})$$

donc $a_{i,i} = a_{j,j}$ et $\begin{cases} a_{i,k} = 0 & \text{si } k \neq i \\ a_{k,j} = 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$

Bref $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{1,1} \end{pmatrix} = a_{1,1} I_n$

$\det(A) = (a_{1,1})^n$ et $\det(A) = \pm 1$ donc $a_{1,1} = \pm 1$

donc $A \in \{\pm I_n\}$ donc $M \in \{\pm I_{2n}\}$ donc

$$\mathcal{Z} \subset \{\pm I_{2n}\}$$

très laid.

Par double inclusion, $\mathcal{Z} = \{\pm I_{2n}\}$ mieux.

13 | Pivot par blocs

Brouillon.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{b}{d} L_2 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} I_n & +BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n - BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n} \text{ donc}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

14 | ${}^tBD = {}^tDB$ donc ${}^tD^{-1}{}^tB = BD^{-1}$ donc BD^{-1} est symétrique.

$$\det(M) = \det(A - BD^{-1}C) \det(D) = \det({}^tA - {}^tC {}^t(BD^{-1})) \det(D)$$

$$= \det({}^tA - {}^tC B D^{-1}) \det(D) = \det({}^tAD - {}^tCB)$$

BD^{-1} sym

$$\text{or } {}^tAD - {}^tCB = I_n \text{ (Q8) donc } \det(M) = 1.$$

15 | $(QV_1 | QV_2) = s_1(PV_1 | QV_2) = s_1 {}^tV_1 {}^tPQV_2 = s_1 (V_1 | {}^tPQV_2)$

$$(QV_1 | QV_2) = s_2(QV_1 | PV_2) = s_2 {}^tV_1 {}^tQP V_2 = s_2 ({}^tPQV_1 | V_2)$$

or tPQ est sym donc $(V_1 | {}^tPQV_2) = ({}^tPQV_1 | V_2)$ donc

$$(s_1 - s_2) ({}^tPQV_1 | V_2) = 0 \text{ donc } ({}^tPQV_1 | V_2) = 0 \text{ donc } (QV_1 | QV_2) = 0.$$

$\underbrace{(s_1 - s_2)}_{\neq 0}$

16 | Soit $X \in \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D)$. Alors $DX = 0$ et $BX = 0$
 donc $({}^tAD - {}^tCB)X = 0$ or ${}^tAD - {}^tCB$ est inv donc $X = 0$.
 $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{0\}.$

17] Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Si $DV_i = 0$, alors $\sum_{j=1}^m BV_j = 0$
donc $BV_i = 0$ donc $V_i \in \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) \neq 0$ donc $V_i = 0 \rightarrow$ faux.
Donc $DV_i \neq 0$. D'après Q15, $(DV_1, \dots, DV_m)$ est une
famille orthogonale. Les vecteurs sont non nuls donc cette famille est
libre.

18.] L'énoncé a fait l'hypothèse $m \leq n$ mais à tort :
cette inégalité n'a pas été utilisée dans nos raisonnements.
Au contraire, cette inégalité est une conséquence
du fait que la famille $(DV_i)_{1 \leq i \leq m}$ soit libre.
Cela prouve qu'il y a au plus $n+1$ valeurs des (en comptant 0)
telles que $D - \alpha B$ soit non inversible.
Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19]
$$\underbrace{K(\alpha)}_{\det=1} M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{pmatrix}}_{\text{notée } N}.$$

$N \in \text{Sp}_{2n}^{\mathbb{K}}$ et $D - \alpha B$ est inv donc,
d'après Q14, $\det(N) = 1$ or $\det(K(\alpha)) = 1$
donc $\det(M) = 1$.