

Exercice préliminaire

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, +\infty[$ , à valeurs réelles strictement positives, décroissante, autre que la fonction nulle. On fait l'hypothèse

$$\forall (u, v) \in ([0, +\infty])^2, \quad f(u+v) = f(u)f(v).$$

Pour tout  $u$  réel, montrer l'égalité  $f(u) = f(1)^u$ .

Processus de Poisson

On considère un système mécanique dans lequel surviennent des pannes. On modélise l'occurrence des pannes comme suit. Pour tout  $t$  dans  $[0, +\infty[$ , le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle temporel  $[0, t]$  est une variable aléatoire  $N_t$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On considère que le système est réparé instantanément après chaque panne. On considère donc ici une famille  $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$  de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Remarquons que la modélisation impose que pour tout  $t$  positif et tout  $u \geq t$ , la variable aléatoire  $N_u - N_t$  soit à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- la variable aléatoire  $N_0$  est égale à 0 ;
- pour tout  $t > 0$ , le nombre  $\mathbb{P}(N_t = 0)$  appartient à  $]0, 1[$  ;
- pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , pour tout  $(n+1)$ -uplet  $(t_0, \dots, t_n)$  strictement croissant d'éléments de  $[0, +\infty[$ , les variables aléatoires  $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes (*hypothèse d'accroissements indépendants*) ;
- pour tout couple  $(s, t)$  d'éléments de  $[0, +\infty[$  soumis à la condition  $0 < s < t$ , la variable aléatoire  $N_t - N_s$  a la même loi que  $N_{t-s}$  (*hypothèse d'accroissements stationnaires*) ;
- le quotient  $\mathbb{P}(N_h > 1)/h$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0 par valeurs strictement positives.

1. Pour tout  $u$  dans  $[0, +\infty[$ , on note  $G_u$  la fonction génératrice de la variable aléatoire  $N_u$ , que l'on définit simplement sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u}).$$

On fixe  $s$  dans  $[0, 1]$ .

- a. Prouver que la fonction  $t \mapsto G_t(s)$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ .
  - b. Pour tout couple  $(u, v)$  d'éléments de  $[0, +\infty[$ , prouver l'égalité  $G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$ .
  - c. Prouver que  $G_1(s)$  est strictement positif. On pose alors  $\theta(s) = -\ln(G_1(s))$ .
  - d. Pour tout  $u$  dans  $[0, +\infty[$ , prouver l'égalité  $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$ .
  - e. En déduire que le quotient  $(G_h(s) - 1)/h$  tend vers  $-\theta(s)$  quand  $h$  tend vers 0 par valeurs strictement positives.
2. Pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ , prouver que le quotient

$$\frac{1}{h} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)$$

tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3. En déduire que le quotient  $\mathbb{P}(N_h = 1)/h$  possède une limite finie quand  $h$  tend vers 0 par valeurs strictement positives. Cette limite est notée  $\alpha$ .

De plus, pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ , prouver l'égalité  $\theta(s) = \alpha(1 - s)$ .

4. En considérant  $G_u(0)$ , prouver que  $\alpha$  est strictement positif.

5. Pour tout  $u > 0$ , prouver que la variable aléatoire  $N_u$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\alpha u$ .

Une famille de variables aléatoires  $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$  telle que celle étudiée ici s'appelle *un processus de Poisson*. La constante  $\alpha$  est le *paramètre* de ce processus de Poisson.

La suite de l'étude n'est pas faisable dans le cadre de notre programme. On y prouve que l'instant où se produit la première panne est une variable aléatoire  $T$  qui suit une *loi exponentielle* de paramètre  $\alpha$ . Cela signifie que pour tout  $t > 0$ , la probabilité de l'événement  $[T > t]$  vaut  $\exp(-\alpha t)$ .