Mathématiques — préparation à l'oral

Nombres complexes, polynômes

Exercice 1. Résoudre le système 0340-18

$$a+b+c=1, \quad abc=1, \quad |a|=|b|=|c|=1$$

d'inconnue $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$.

Exercice 2. On pose $z=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{10}$. 1135-18

a. Calculer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

b. Trouver un polynôme réel P non nul, de degré aussi petit que possible, tel que $\mathrm{P}(z)=0$.

Exercice 3. Calculer $\mathrm{Arctan}(2)+\mathrm{Arctan}(5)+\mathrm{Arctan}(8)$. 0637-12

Exercice 4. Montrer que $(\mathrm{X}-1)^3$ divise $n\mathrm{X}^{n+2}-(n+2)\mathrm{X}^{n+1}+(n+2)\mathrm{X}-n$. A039-18

Exercice 5. On pose $\mathrm{P}=\mathrm{X}^3+\mathrm{X}+1$. On note α,β,γ les racines complexes de P. 1070-18

a. Pour tout $k\in\{1,2,3\}$, calculer $\alpha^k+\beta^k+\gamma^k$.

b. En exploitant la division euclidienne de X^4 par P, calculer $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$.

Exercice 6. (**) Résoudre l'équation $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}'(\mathrm{X})$ d'inconnue $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. 0342-18

Exercice 7. (**) Déterminer les polynômes réels P tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)=\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$. 0492-17

Exercice 8. Soit P un polynôme complexe non constant. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que P^n divise $\mathrm{P}\circ\mathrm{P}$. 0344-18
Montrer que X^n divise P.

Exercice 9. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7. A040-18

Exercice 10. (***) On considère un polynôme réel P tel que $\mathrm{P}(x)$ soit positif pour tout x réel. 1015-12

Montrer qu'il existe alors deux polynômes réels A et B vérifiant l'égalité $\mathrm{P}=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E. On fait les hypothèses A015-18

$$f^3+f=0 \qquad \text{et} \qquad f\neq 0.$$

1. Calculer $\mathrm{dét}(-\mathrm{Id_E})$. En déduire que f^2 est différent de $-\mathrm{Id_E}$ puis que f n'est pas injectif.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id_E})$ sont supplémentaires dans E.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id_E})$ n'est pas réduit à $\{0_\mathrm{E}\}$.

4. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^2(x)\neq 0_\mathrm{E}$.

5. Montrer que pour un tel vecteur x, la famille $(f(x),f^2(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id_E})$.

6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id_E})$ est de dimension 2.

7. Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 12. (**) Soient $(X_1, \dots, X_q)$ et $(Y_1, \dots, Y_p)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. 0778-17

Montrer que la famille $(Y_i \times X_j^T)_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13. Soit p un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g = p + \alpha \mathrm{Id}_E$. A019-18

1. Calculer g^2.

2. On suppose que g est bijectif. Trouver une expression de g^{-1}.

Exercice 14. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul. A028-18

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

2. Montrer qu'il existe une constante λ complexe telle que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 15. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Pour tout entier n, on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f. A031-18

1. Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.

4. Prouver que f est surjective.

5. Trouver tous les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.

6. En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 16. (**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f^n est nul et que f^{n-1} ne l'est pas. A046-16

On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec g.

1. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

2. Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

Exercice 17. (**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. À quelle condition existe-t-il un supplémentaire commun à F et G ? 0319-16

Exercice 18. (**) On fixe un entier $n \geqslant 2$. P001-13

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il vrai que l'égalité $AB = 0$ implique $BA = 0$?

2. Trouver une condition suffisante sur B pour que l'implication

$$AB = 0 \Rightarrow BA = 0$$

soit vraie.

3. Trouver une condition suffisante sur A pour que l'implication

$$AB = 0 \Rightarrow BA = 0$$

soit vraie.

Exercice 19. (***) Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $v \in \mathcal{L}(E, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. A070-18

Montrer que l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(v)$ équivaut à l'existence de $u \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = u \circ f$.

Matrices

Exercice 20. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on suppose que son déterminant est impair. A025-18

On se donne $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \in \{\pm 1\}^4$ et on pose $\mathrm{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a\varepsilon_1 & b\varepsilon_2 \\ c\varepsilon_3 & d\varepsilon_4 \end{pmatrix}$.

Montrer que la matrice A_ε est inversible.

Généraliser.

Exercice 21. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. 0362-18
On suppose qu'il existe un vecteur colonne complexe v non nul tel que $\mathrm{A}v = \lambda v$.
Existe-t-il un vecteur colonne réel w non nul tel que $\mathrm{A}w = \lambda w$?

Exercice 22. **(**)** Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit Φ un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse 0357-18

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad \Phi(\mathrm{AB}) = \Phi(\mathrm{A})\Phi(\mathrm{B}).$$

a. Déterminer $\Phi(\mathrm{I}_n)$.

b. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que $\Phi(\mathrm{E}_{i,i})$ est un projecteur de rang 1.

c. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on se donne un vecteur U_i qui dirige $\mathrm{Im}(\Phi(\mathrm{E}_{i,i}))$. Montrer que $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

d. **(***)** Imaginer une fin à cet exercice.

Exercice 23. On note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par 0738-18

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A_n est semblable à sa transposée.

Exercice 24. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, 2, \dots, n$. A052-17

Trouver toutes les matrices qui sont semblables à A et qui commutent avec elle.

Exercice 25. **(**)** Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$. 0783-17

a. Déterminer le rang de M.

b. Calculer M^{-1} en cas d'existence.

Exercice 26. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. 0736-18
On fait l'hypothèse $u^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

a. Montrer que n est pair.

b. Montrer que u ne laisse stable aucun hyperplan de E.

c. On pose $p = n/2$. Montrer que u admet la représentation matricielle $\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_p \\ \mathrm{I}_p & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 27. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A^T sont semblables. 0776-17

Exercice 28. Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^T commute avec M. Montrer que M est diagonale. 0387-17

Déterminant

Exercice 29. Pour toute matrice M à coefficients complexes, on note $\overline{M}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient par son conjugué. 0358-18

a. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer l'égalité $\overline{\text{dét}(M)} = \text{dét}(\overline{M})$.

b. Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles ?

c. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\text{dét}(I_n + M \cdot \overline{M})$ appartient à $\mathbb{R}$.

Exercice 30. (**) Soient un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \exp(i2\pi/n)$. A041-17

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$.

a. Calculer un argument du déterminant de A.

b. Calculer $\overline{A} \times A$. En déduire la valeur du déterminant de A.

Exercice 31. (**) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & \ddots & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 0497-17

Réduction

Exercice 32. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. A006-18

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

2. Trouver une matrice P de $GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & + & 4y \\ y' & = & -x & + & 3y. \end{array} \right.$

Exercice 33. On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. A013-18

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $D = \text{diag}(1, 2, 4)$.

3. On considère l'équation $M^2 = D$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si M est solution, alors elle commute avec D. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

4. Résoudre l'équation $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 34. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^k = \mathrm{I}_n$. Montrer que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$. A041-18

Trouver une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable.

Exercice 35. Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^5 + \mathrm{A}^4 + \mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. A008-18

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.

3. En déduire que A est la matrice nulle.

Exercice 36. On se donne un entier $n \geqslant 3$ et on note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la deuxième ligne et de la deuxième colonne, qui valent 1. A023-18

1. Calculer M^2.

2. Montrer que M est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Exercice 37. Diagonaliser la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. A050-18

Exercice 38. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre. A052-18

Question subsidiaire (**). Montrer que c'est encore vrai si A n'est pas inversible.

Exercice 39. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. 0740-18

a. Calculer les puissances de la matrice A.

b. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations de récurrence

$$u_{n+1} = -4u_n - 6v_n, \quad v_{n+1} = 3u_n - 5v_n, \quad w_{n+1} = 3u_n + 6v_n - 5w_n.$$

Exprimer le terme général de ces suites.

Exercice 40. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. 0751-18

a. Montrer que A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b. Déterminer les matrices B telles que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

Exercice 41. (**) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = n\mathrm{X}\mathrm{P}(\mathrm{X}) - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'(\mathrm{X})$. 0756-18

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 42. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. 0369-18

Montrer qu'il existe une base de diagonalisation commune à A et B.

Exercice 43. On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$). Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M} + \beta\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$, ce qui définit un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 0757-18

a. Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

b. Calculer la trace et le déterminant de Φ.

Exercice 44. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que A est semblable à A^k. 0368-18

Exercice 45. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. 1042-18

Exercice 46. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. 1142-18

On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $fg - gf = af + bg$. Dans les quatre premières questions, on suppose que b est nul.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on pose $\varphi_g(u) = ug - gu$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\varphi_g(f^n) = anf^n$.

c. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$.

d. En considérant $\tilde{g}$, l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}(f)$ induit par g, montrer que f et g admettent un vecteur propre commun.

e. On ne suppose plus que b soit nul. En considérant $h = af + bg$ et $\varphi_g(h)$, montrer que f et g admettent un vecteur propre commun.

Exercice 47. (***) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B}) = \varnothing$. On suppose que B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. 0370-18

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AM} - \mathrm{MB} = \mathrm{C}$.

Espaces euclidiens

Exercice 48. Soit E un espace euclidien. Soit u un endomorphisme de E tel que 1088-18

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 49. On note $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A043-18

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

2. Trouver la distance de la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 50. Soit E un espace euclidien. Soit s un endomorphisme de E. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents : A020-18

- $\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad (s(x)|s(y)) = c(x|y)$;
- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad ((x|y) = 0 \Rightarrow (s(x)|s(y)) = 0)$.

Exercice 51. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$. Soient a et b deux vecteurs de E non colinéaires. On définit l'endomorphisme f de E par A064-18

$$f(x) = (a|x)a + (b|x)b.$$

a. Donner le format de la matrice de f dans une base quelconque de E.

b. Déterminer le noyau et l'image de f.

c. L'endomorphisme f est-il symétrique ?

1150-18

Exercice 52. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on pose $(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{P}(t)\,\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

b. Vérifier que $(1, \mathrm{X}-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

c. Trouver le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $\mathrm{F} : (a,b) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 - at - b\right)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 53. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M possède n valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. 1148-18

a. Montrer que ${}^t\mathrm{M}$ est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres que M.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note V_k un vecteur propre de M pour la valeur propre λ_k et W_k un vecteur propre de ${}^t\mathrm{M}$ pour la même valeur propre.

b. Montrer que pour tout couple (i, j) d'indices distincts, le produit scalaire ${}^t\mathrm{V}_i \cdot \mathrm{W}_j$ est nul.

c. Pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, en déduire que ${}^t\mathrm{V}_i \cdot \mathrm{W}_i$ n'est pas nul.

d. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\mathrm{B}_k = \dfrac{\mathrm{V}_k \cdot {}^t\mathrm{W}_k}{{}^t\mathrm{V}_k \cdot \mathrm{W}_k}$. Calculer $\mathrm{B}_k\mathrm{V}_i$. Que reconnaît-on ?

e. Que valent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{B}_k$?

Exercice 54. **(**)** Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $n(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A})$. 0383-18

a. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'inégalité $n(\mathrm{AB}) \leqslant n(\mathrm{A})n(\mathrm{B})$.

b. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, répétées selon leurs multiplicités et numérotées dans l'ordre croissant.

Montrer la majoration $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(\mathrm{A})$.

0502-18

Exercice 55. **(**)** On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Existe-t-il sur $\mathbb{R}^2$ un produit scalaire pour lequel f est une isométrie ?

Exercice 56. **(***)** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 0380-18

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{k,k}).$$

Montrer que la matrice A est diagonale.

Exercice 57. **(***)** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A}$ sont semblables. 0379-18

Espaces vectoriels normés

Exercice 58. (**) On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose A048-17

$$\mathrm{N}(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty.$$

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Prouver la majoration $||f||_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$.

c. Existe-t-il $\lambda > 0$ tel que $\forall f \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(f) \leqslant \lambda ||f||_\infty$?

Exercice 59. (**) Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit A un ouvert de E. Soit B une partie quelconque de E. 1047-18

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Adh}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{Adh}(\mathrm{A} \cap \mathrm{Adh}(\mathrm{B}))$.

b. Trouver un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert.

Exercice 60. (**) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose 0385-18

$$\mathcal{E} = \left\{\mathrm{PMP}^{-1}\,;\, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}.$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est borné si, et seulement si, la matrice M est un multiple de I_n.

Exercice 61. (**) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, ||\ ||)$ de dimension finie. 0530-18

Montrer que l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ équivaut à l'existence de $\mathrm{C} > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{E},\ ||f(x)|| \leqslant \mathrm{C} \times ||f^2(x)||$.

Suites numériques

Exercice 62. On définit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant x_0 dans $]-1,1[$ puis en posant 0389-18

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}.$$

a. Montrer que cette suite converge. Sa limite est notée ℓ.

b. (**) Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 63. (**) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$, notée x_n. 1103-17

Obtenir un développement asymptotique de x_n sous la forme $a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 64. (***) Étant donné une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire qu'elle est *sous-additive* signifie qu'elle vérifie la propriété 0067-16

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad a_{n+m} \leqslant a_n + a_m.$$

a. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous-additive et on suppose que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée. On pose

$$\alpha = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Montrer que a_n/n tend vers α quand n tend vers $+\infty$.

b. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et croissante. On fait l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+1) = f(x) + 1.$$

Montrer que pour tout x réel, la suite de terme général $\dfrac{f^n(x) - x}{n}$ converge. Ici, la notation f^n désigne l'itérée d'ordre n de f.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 65. On définit la fonction $f : x \mapsto x^{x^{1/x}}$ sur $]0, +\infty[$. 0398-18

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x+1)/f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déterminer la limite de $f(x+1) - f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 66. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$. 0584-17

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 67. Existe-t-il une fonction continue et surjective de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$? de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$? 0394-18

Dans le cas où la réponse est affirmative, montrer qu'une telle fonction ne peut pas être injective.

Exercice 68. (**) Montrer que la fonction cosinus admet dans $\mathbb{R}$ un unique point fixe. 0402-18

Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 69. (**) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que f' est à valeurs dans $[0, 1]$. 0403-18

Pour tout $x \geqslant 0$, montrer l'inégalité $\displaystyle\int_0^x f^3 \leqslant \left(\int_0^x f\right)^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 70. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Soient p et q dans $]0, +\infty[$. 0404-18

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 71. (***) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b])$. 0332-18

a. Montrer que f possède au moins un point fixe.

b. Soit J un segment inclus dans $f([a, b])$. Montrer qu'il existe c et d dans $[a, b]$ tels que $c \leqslant d$ et $f([c, d]) = \mathrm{J}$.

Séries numériques

Exercice 72. Nature de la série de terme général $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma}$. 1050-18

Exercice 73. (**) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que a_n soit équivalent à $\alpha \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. 0392-18

a. Montrer que la série de terme général $\exp(-a_n)$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

b. Peut-on conclure si $\alpha = 1$?

Exercice 74. (**) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$. 0391-18

Exercice 75. Comment faire pour calculer $\cos(1)$ à 10^{-n} près ? 0397-18

Exercice 76. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < a < b-1$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs vérifiant la relation de récurrence A084-17

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1.

a. Trouver un équivalent de $\ln((n+a)/(n+b))$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ tend vers $-\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^{b-a} u_n$.

a. Montrer que la suite de terme général $\ln(v_n)$ est convergente.

b. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K} > 0$ telle que u_n soit équivalent à K/n^{b-a} quand n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

3. Prouver l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \times \dfrac{b-1}{b-a-1}$.

Indication : simplifier les sommes $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n)$ et $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$.

Exercice 77. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive de limite nulle. A004-18
On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que la série de terme général $(u_n)^a$ converge.

1. Montrer que si D est non vide, alors c'est un intervalle de la forme $[s, +\infty[$ ou $]s, +\infty[$.

2. Donner un exemple où D est vide et un exemple où D est de la forme $]s, +\infty[$.

Exercice 78. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{n}{n+\alpha}\right)^{n\ln(n)}$. A021-18

Exercice 79. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $n(u_{n+1} - u_n)$ tende vers 1 quand n tend vers $+\infty$. A067-18

1. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ diverge.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 80. (**) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents : A026-18

- la série $\sum a_n$ converge ;
- la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge et $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

Exercice 81. (**) Nature de la série de terme général $\sin(\pi(1+\sqrt{2})^n)$. 0767-16

Exercice 82. (***) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = n(x_n - n)$. 0429-17

Montrer que la relation $x_n = \mathcal{O}(n)$ équivaut à $x_1 = 2\mathrm{e}$.

Suites et séries de fonctions

Exercice 83. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. A007-18

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

2. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$? Pour tout a dans $]0,1]$, montrer que la convergence est uniforme sur le segment $[a,1]$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. On pourra effectuer un changement de variable.

Exercice 84. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto n^a x^n(1-x)$ sur $[0,1]$. A016-18

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2. Étudier la convergence uniforme.

Exercice 85. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1/\operatorname{ch}(x^n)$. A045-18

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 86. (**) Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$. 1048-18

a. On suppose que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa limite simple est encore un élément de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

b. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 87. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$. 1100-18

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi/2]$, puis la convergence uniforme.

Exercice 88. A011-18

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,+\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Énoncer le théorème des séries alternées dans sa totalité.

2. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

3. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k+1}$.

4. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

5. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

7. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 89. Pour tout x réel convenable, on pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. A032-18

1. Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 90. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $u_n=\mathrm{e}^{-n^2x}$ et on pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque c'est possible. A038-18

1. Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$ mais que f est quand même continue sur cet intervalle.

3. Montrer que $f-u_0$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et exprimer son intégrale en fonction de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$. La fonction f est-elle intégrable sur cet intervalle ?

4. On admet provisoirement l'encadrement $g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)+1$ avec $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

5. Démontrer cet encadrement.

Exercice 91. On pose $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx^2}$. A053-18

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.

2. Y a-t-il convergence normale sur $\mathcal{D}_f$? sur les segments de $\mathcal{D}_f$?

Exercice 92. Pour tout entier $n\geqslant 2$ et tout $x>0$, on pose $u_n(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^n\,\ln(n)}$. 1101-18

a. Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de la fonction $\mathrm{S}: x\mapsto\sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n(x)$.

b. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Prouver la majoration $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. En déduire que la fonction S est continue sur D.

e. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

Séries entières

Exercice 93. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^2+4n-1}{n+2}x^n$ et calculer sa somme. A051-18

Exercice 94. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{2n+1}$. A060-18

Exercice 95. Développer en série entière la fonction $f: x\mapsto\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)$. 0816-18

Exercice 96. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. 0579-18

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n x^n$.

Exercice 97. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} (\mathrm{e}^t - 1)^n \, \mathrm{d}t$. 0608-17

a. Trouver une relation de récurrence simple pour la suite $(\mathrm{I}_n)_{n \geqslant 0}$.

b. En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

c. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \mathrm{I}_n x^n$.

Exercice 98. (**) On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fixant son premier terme u_0 dans $]0, +\infty[$ puis en posant 0819-18

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \, u_{n-k}.$$

On note f la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

a. On suppose que f a un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Exprimer $f(x)$ pour tout x dans $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 99. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{tr}(\mathrm{A}^n) z^n$. 0821-18

Exercice 100. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\alpha \in]0, 1]$. A059-18

On suppose que :
- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$;
- la fonction f' est décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$;
- $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} f'(x+1)$.

1. Montrer que $f(x+\alpha) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \alpha f'(x)$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\mathrm{Arctan}\left(n + \dfrac{1}{2}\right) - \mathrm{Arctan}(n)\right) x^n$.

Exercice 101. (**) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On note R_a et R_n les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. 0580-18

a. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n z^n$?

b. On suppose que les a_n sont tous non nuls. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum z^n / a_n$?

Exercice 102. (***) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On fait l'hypothèse 0818-18

$$n\left(\frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

a. Si $\ell \neq 0$, trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

b. Si $\ell = 0$, peut-on conclure ?

Exercice 103. (***) On fixe ε dans $]0,\pi[$ et on introduit l'ensemble 0190-18

$$\Omega = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ ;\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ -\pi+\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi-\varepsilon\}.$$

On définit la fonction $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\dfrac{z^k}{k}$.

a. Trouver le rayon de convergence de la série entière associée à f.

b. On pose $\mathrm{S}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\dfrac{z^k}{k}$. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction f sur l'ensemble Ω.

Pour cela, on écrira

$$\mathrm{S}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_{n-1}(z)-\mathrm{T}_n(z)}{k} \qquad \text{en ayant posé} \qquad \mathrm{T}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} z^k.$$

c. On fixe θ dans $]-\pi,\pi[$. Dériver la fonction $\ell_\theta : x \mapsto f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ sur $[0,1[$.

d. Montrer que la fonction $\mathrm{L} : x \mapsto \exp(\ell_\theta(x))$ a une dérivée seconde nulle.

e. En déduire une expression de $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Intégration

Exercice 104. On note $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Pour tout x de D, on pose A022-16

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

1. Prouver l'identité $\left|x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = x^2-2x\cos(\theta)+1$.

2. Montrer que I est bien définie sur D.

3. Pour tout x non nul de D, prouver la formule $\mathrm{I}(1/x) = -2\pi\ln(|x|)+\mathrm{I}(x)$.

4. Montrer que la fonction I est paire (on pourra utiliser le changement de variable $t = \pi-\theta$).

5. On admet l'identité

$$\forall x \in\,]0,1[, \quad \forall \theta \in [0,\pi], \qquad 1-2x^2\cos(2\theta)+x^4 = (1-2x\cos(\theta)+x^2)(1+2x\cos(\theta)+x^2).$$

a. Pour tout x dans $]0,1[$ et tout θ dans $[0,\pi]$, prouver que les nombres

$$1-2x\cos(\theta)+x^2 \qquad \text{et} \qquad 1+2x\cos(\theta)+x^2$$

sont strictement positifs.

b. Pour tout x dans $]0,1[$, prouver l'égalité $\mathrm{I}(x^2) = 2\mathrm{I}(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = 2\theta$).

6. (**) Obtenir une expression de $\mathrm{I}(x)$.

0881-17

Exercice 105. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin}(t)}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0.

1114-17

Exercice 106. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ quand α tend vers 0.

Exercice 107. Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que A057-18

$$\forall x \geqslant 0, \quad c \int_0^x f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \right)^2.$$

Exercice 108. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive. 0453-17

Montrer l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x) \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 109. (**) Soient u et v deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe une constante c positive vérifiant la propriété 0410-14

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer la domination

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad u(x) \leqslant c \exp\left(\int_0^x v(t)\ \mathrm{d}t \right).$$

Exercice 110. (***) On note E l'ensemble des fonctions $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui sont 1-lipschitziennes et qui s'annulent en 0. 0365-16

Déterminer $\sup \left\{ \displaystyle\int_0^1 (u(t) - u(t)^2)\ \mathrm{d}t\ ;\ u \in \mathrm{E} \right\}$.

Exercice 111. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer qu'il existe un unique λ réel tel que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ converge. 0407-18

Exercice 112. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}\ \mathrm{d}x$ selon la valeur des paramètres α et β. 0430-16

Exercice 113. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t$. 0773-16

a. Déterminer l'ensemble de définition de f. Justifier que f est dérivable et exprimer sa dérivée.

b. Trouver des équivalents de f aux bornes de son intervalle de définition.

c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 114. (***) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. A069-18

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 115. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n \mathrm{e}^{-t}}$ sur $[0, +\infty[$. A044-18

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 116. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}$. 0588-18

a. Montrer que ces intégrales sont bien définies.

b. Calculer u_0, u_1, u_2.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite ℓ à déterminer.

d. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 117. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$. A076-16

1. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Trouver un développement asymptotique à deux termes pour I_n.

Exercice 118. Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$. A024-18

1. Pour tout $\varepsilon \in [0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$.

2. En déduire que $f(0)$ existe et calculer sa valeur.

3. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 119. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. 0893-17

a. Montrer que cette intégrale existe.

b. Justifier l'égalité $\mathrm{I} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$.

Exercice 120. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t+t^3}\,\mathrm{d}t$. A017-18

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $f'(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Déterminer la limite de f' en $+\infty$.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

A005-18

Exercice 121. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. (**) Trouver la limite de f en $+\infty$ puis un équivalent.

A018-18

Exercice 122. Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-1/t}$.

1. Montrer que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ existe. On la note $h(x)$.

3. Montrer que les solutions de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}(h(x) + k)$, où k est une constante réelle.

4. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $\mathrm{e}^{1/x}h(x) = x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+xu}\ \mathrm{d}u$.

On pourra considérer le changement de variable $t = \dfrac{x}{1+xu}$.

5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+xu}\ \mathrm{d}u$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

6. Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $[0, +\infty[$ et que c'est la seule.

7. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

8. Trouver la limite de g en $+\infty$.

A033-18

Exercice 123. **1.** Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\ \mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\ \mathrm{d}t$.

Montrer qu'il existe une constante réelle K telle que $\forall x > 0,\ f'(x) = \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}$.

A049-18

Exercice 124. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.

1157-18

Exercice 125. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ln(t)\ \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

1161-18

Exercice 126. On pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}-1}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer la fonction f' puis la fonction f.

Équations différentielles

Exercice 127. On considère l'équation différentielle $\sqrt{1+t^2}y''(t)+ty'(t)-y(t)=0$. A002-18

1. Tracer les solutions f et g soumises aux conditions initiales

$$(f(0),f'(0))=(0,1) \qquad \text{et} \qquad (g(0),g'(0))=(1,0).$$

L'une d'elles vous semble-t-elle évidente ?

2. Chercher l'autre solution sous la forme d'une somme de série entière.

3. Pour tout t dans $]-1,1[$, prouver l'égalité $g(t)=\sqrt{1+t^2}$.

Exercice 128. Pour tout λ réel, on note (E_λ) l'équation différentielle $xy'-(1+\lambda)y=0$. A054-18

1. Résoudre (E_λ) sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$.

2. On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}'-\mathrm{P}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 129. Soit f une fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Soit y une solution de l'équation différentielle (E) suivante A066-18

$$y''(x)+f(x)y(x)=0.$$

1. On suppose que y est bornée sur $[0,+\infty[$. En déduire que $f\times y$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que y' possède une limite nulle en $+\infty$.

2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E). On leur associe la fonction

$$\mathrm{W} : t \mapsto \text{dét}\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que la fonction W est constante et en déduire qu'il existe des solutions de (E) non bornées.

Exercice 130. Trouver $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que 1116-18

$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}, \quad \frac{1}{t(t^2-1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{t+1}.$$

Résoudre l'équation différentielle $t(t^2-1)x'(t)+2x(t)=t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 131. On considère le système différentiel $\left\{\begin{array}{lclclcl} x'(t) & = & & & & & z(t) \\ y'(t) & = & & & & & 2z(t) \\ z'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t). \end{array}\right.$ 1118-18

Soit $\mathrm{M} : t\mapsto (x(t),y(t),z(t))$ une solution sur $\mathbb{R}$ de ce système différentiel.

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur M(0) pour que la trajectoire de M soit bornée sur $[0,+\infty[$. Même question sur $\mathbb{R}$.

Exercice 132. (***) On note $\mathrm{F}=\left\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\, f(0)=f(1)=0\right\}$. 0413-18

a. Déterminer les λ réels pour lesquels l'équation différentielle $y''+\lambda y=0$ possède une solution non nulle dans F.

b. On suppose qu'il existe $\mathrm{C}>0$ tel que

$$\forall\varphi\in\mathrm{F}, \quad \int_0^1 \varphi^2 \leqslant \mathrm{C}\int_0^1 (\varphi')^2.$$

On suppose également qu'il existe une fonction f vérifiant le cas d'égalité de l'inégalité précédente. Montrer alors que f vérifie une équation différentielle à déterminer.

Exercice 133. (***) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = y^2$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. 0415-18

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 134. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, prouver l'inégalité $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$. A048-18

Exercice 135. On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$. 0416-18

Exercice 136. On considère les ensembles $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy < 1\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 0\}$. 0608-18

a. Représenter graphiquement ces ensembles. Sont-ils ouverts ? fermés ?

b. On définit une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 - xy)}{xy} \quad \text{si } xy \neq 0, \qquad f(x, y) = -1 \quad \text{si } xy = 0.$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 137. Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy - 15x - 12y$. 1067-18

Exercice 138. On pose $\mathrm{D} = [-1, 1] \times \mathbb{R}$. On définit sur D la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2}\cos(y)$. 1167-18

a. Exprimer les dérivées partielles de f en précisant un domaine de validité.

b. Préciser les points critiques de f.

c. Pour tout $(x, y) \in \mathrm{D}$, prouver la minoration $f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leqslant x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4$. Étudier le signe du majorant.

d. Étudier le signe de $f(0, y) - 1$.

e. Calculer un développement limité de $x \mapsto f(x, \pi) - 1$ à l'ordre 2 en 0.

f. La fonction f admet-elle un extremum local au point $(0, \pi)$?

g. Montrer que f admet un minimum global en $(0, 0)$.

Exercice 139. (***) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction 0329-18

$$f : \mathrm{X} \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{X}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} - \mathrm{B}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{X}$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que la fonction f possède un minimum si et seulement si les valeurs propres de A sont positives et B appartient à l'image de A.

b. Exprimer le gradient de f.

c. On introduit $\mathrm{C} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^n$. On leur associe la fonction

$$g : \mathrm{X} \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{X}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{X} - \mathrm{D}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{X}.$$

On suppose que f et g possèdent un minimum. Montrer que la condition

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad ||\nabla f(\mathrm{X})|| = ||\nabla g(\mathrm{X})||$$

entraîne $f = g$.

Exercice 140. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto x \ln(y) - y \ln(x)$. 1168-18

a. Préciser l'ensemble de définition de f.

b. Étudier l'existence d'extrema de f et préciser leur nature.

Exercice 141. Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u, v) = (x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2})$. 1140-17

Exercice 142. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. On lui associe la fonction A014-18

$$f : (x, y) \mapsto g\left(\frac{y}{x}\right),$$

définie sur $\mathbb{R}\times\,]0, +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y'(t) + 2ty(t) = 0$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

3. Déterminer les choix de g pour lesquels $\Delta f = 0$.

Exercice 143. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $x\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + y$. 0941-15

On utilisera le changement de variables $(x, y) = (u, v + u^2/2)$.

Exercice 144. (**) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ telles que la fonction $g : (x, y, z) \mapsto f\left(\dfrac{x}{y + z}\right)$ soit harmonique sur $]0, +\infty[^3$. 0640-17

Dénombrement et probabilités

Exercice 145. (***) On range n boules distinctes dans n boîtes. On note π_n la probabilité qu'exactement une boîte soit vide. 0429-18

Exprimer π_n puis en trouver un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 146. On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une carte de chaque couleur ? 1122-18

Exercice 147. On suppose que 40 hommes et 40 femmes défilent dans un ordre aléatoire. Montrer que la probabilité de ne jamais avoir deux hommes ou deux femmes successivement est de l'ordre de l'inverse du nombre d'Avogadro. 0420-18

Exercice 148. (**) Dire d'une partie A de $\mathbb{N}$ qu'elle est *fade* signifie qu'il n'existe pas de triplet (x, y, z) d'éléments de A tel que $x + y = z$. 0173-18

Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 149. Peut-on truquer deux dés à 6 faces pour que leur somme suive une loi uniforme ? A063-18

Exercice 150. (***) Soient X_0 et Y_0 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$. 0422-18
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$.
On suppose que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit la même loi que $\mathrm{X}_0 + \mathrm{Y}_0$. Montrer que X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Exercice 151. (**) Pour ouvrir une serrure, on dispose de n clés. On les essaie successivement au hasard, sans remise. Déterminer la loi du nombre de tentatives. 0646-17

Exercice 152. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$. A001-18

1. Donner la loi de S_n.

2. Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ? (Puis : démontrer la loi faible des grands nombres.)

Soit $t \in \mathbb{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$\mathrm{N}_t = \operatorname{Card}\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ \mathrm{S}_k \leqslant t\}.$$

On remarque alors l'égalité $[\mathrm{N}_t = k] = [\mathrm{S}_k = t] \cap [\mathrm{S}_{k+1} = t]$.

3. Déterminer la loi de N_t.

4. Déterminer la fonction génératrice de N_t.

Exercice 153. On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité p de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel. A003-18

On effectue ensuite une deuxième vague d'appel à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel.

On répète le processus jusqu'à ce que tout le monde ait répondu. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on note Y_j le numéro de l'appel auquel la j-ième personne a répondu. On note N le nombre total de vagues d'appels.

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2. Donner la loi de Y_j.

3. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

4. **(***)** Calculer l'espérance de N.

Exercice 154. On lance deux dés équilibrés. Les résultats sont notés X_1 et X_2. Le plus petit des deux est noté X. Le plus grand est noté Y. A022-18

1. Déterminer la loi de X et son espérance.

2. En déduire l'espérance de Y (on considérera $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$).

3. Simplifier $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ et en déduire la covariance de (X, Y).

Exercice 155. **(**)** Soient a et b dans $]0, +\infty[$ avec $a + b = 1$. 0487-17

a. Montrer que la série $\sum \binom{2n}{n} a^n b^n$ converge sauf si $(a, b) = (1/2, 1/2)$.

On se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe. On est initialement en 0. À un instant donné, la probabilité d'aller à droite vaut a et la probabilité d'aller à gauche vaut b. On note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n. On note p_n la probabilité d'être de retour en 0 pour la première fois à l'instant n.

On pose $\mathrm{R}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $\mathrm{P}(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.

b. Montrer que les fonctions R et P sont définie sur $]-1, 1[$.

c. Pour tout $t \in]-1, 1[$, justifier l'égalité $\mathrm{R}(t) = 1 + \mathrm{R}(t)\mathrm{P}(t)$.

d. On note A l'événement « On revient au moins une fois en 0. ». Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ vaut 1 si, et seulement si, on est dans le cas $(a, b) = (1/2, 1/2)$.

Exercice 156. On considère une pièce dont la probabilité de faire `pile` est notée p. A042-18
On lance cette pièce n fois. Quelle est la probabilité que `face` n'ait jamais été suivi de `pile` ?

Question subsidiaire. Interpréter ce résultat dans le cas $p = 1/2$.

Exercice 157. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe k dans $]0, 1[$ tel que A055-18

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = k \times \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 158. Soit $p \in]0, 1[$. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi GN(p) signifie que A009-18

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^k,$$

où l'on a posé $q = 1 - p$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi GN(p). On pose $S = X + 1$. Reconnaître la loi de S. En déduire l'espérance de X.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi GN(p). On pose $Z = \min(X, Y)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\mathbb{P}(X \geqslant n) = q^n$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$.

3. Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

On lance une pièce dont une probabilité de faire Pile vaut p. Pour tout entier i, on note F_i l'événement « On obtient Face au i-ième lancer. ».

On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de Face avant le premier Pile.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction des F_i.

5. Déterminer la loi de T et son espérance.

6. On reprend les variables aléatoires X, Y, Z de la question 2 et on pose $D = |X - Y|$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de D sachant $(Z = k)$. En déduire la loi de D.

Exercice 159. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. A010-18

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer l'événement $[X_1 - X_2 = n]$ comme réunion disjointe d'événements, de manière à calculer sa probabilité.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n) = \mathbb{P}(X_2 - X_1 = n)$. En déduire la loi de $X_1 - X_2$.

3. On suppose que X_1 et X_2 représentent le temps d'attente à deux guichets de gare distincts. Comment interpréter l'événement $[X_1 - X_2 > 0]$?

Exercice 160. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$. A012-18

Exercice 161. Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique une journée donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou aucun article. Déterminer la loi de Y, le nombre d'articles achetés au cours d'une journée. 0905-17

Exercice 162. Soient X et Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes, de même loi. 0427-18

Montrer l'inégalité $\mathbb{E}(X/Y) \geqslant 1$.

Exercice 163. Soit X une variable aléatoire strictement positive. Prouver l'inégalité $\mathbb{E}\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geqslant 2$. 0428-18

Exercice 164. **(**)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{k/n} - 1\right)$. 0172-18

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n dont la loi est donnée par

$$X_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}, \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{e^{k/n} - 1}{\alpha_n}.$$

a. Trouver un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.

b. On note F_n la fonction de répartition de X_n. Exprimer $F_n(x)$ pour tout x réel.

c. Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue, à exprimer explicitement.

d. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 165. **(***)** Pour tout $\lambda > 0$, on se donne des variables aléatoires $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. 0192-17

a. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}(|A_\lambda - \lambda| \geqslant \varepsilon\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

b. Déterminer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de la probabilité de l'événement « Le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ a toutes ses racines réelles. ».

Géométrie

Exercice 166. On définit la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xyz)}{1 + (xyz)^2} - \dfrac{\pi}{8}$ sur $\mathbb{R}^3$. 1121-18

Déterminer une équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

Exercice 167. Soit $p > 0$. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$. Le point $F = (p/2, 0)$ est *le foyer* de cette parabole. La droite d'équation $x = -p/2$ est *la directrice* de cette parabole, notée $\mathcal{D}$. S002-16

a. Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points du plan équidistants de F et de $\mathcal{D}$.

b. Soit M un point de la parabole $\mathcal{P}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point M est la médiatrice du segment [HF], où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 168. Représenter rapidement la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^2$ et $y(t) = 2t^3$. S001-16

Étant donné deux paramètres t et u, déterminer une équation de la tangente au point de paramètre t et de la normale au point de paramètre u. Dans quels cas ces deux droites sont-elles confondues ?

Exercice 169. On définit l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y^2 = x^3 - 2x\}$. 0477-17

a. Tracer l'ensemble D.

b. Soient A et B deux points distincts de D d'abscisses négatives. Discuter le nombre de points d'intersection entre la droite (AB) et l'ensemble D.

Exercice 170. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (-1, 0, 1)$ et $B = (3, 1, 0)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u} = (2, 1, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$. 1152-17

a. Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Idem pour la droite Δ passant par B et dirigée par $\vec{v}$.

b. Montrer qu'il existe une valeur minimale de la distance MN lorsque M est un point qui parcourt la droite D et N est un point qui parcourt la droite Δ. On déterminera cette distance.

Exercices de piste noire en vrac

Exercice 171. (***) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit X une partie convexe de E. Soit $u \in \mathrm{X}$. Dire que u est un *point extrémal* de X signifie que $\mathrm{X} \setminus \{u\}$ est convexe. 0145-18

a. Déterminer les points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne.

b. Même question pour la norme $|| \ ||_1$ définie par $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$.

c. Montrer que u est un point extrémal de X si et seulement si u n'est pas le milieu de deux points de $\mathrm{X} \setminus \{u\}$.

d. On note B la boule unité fermée d'un espace euclidien E. On munit $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ de la norme $||| \ |||$ définie par

$$|||u||| = \sup_{x \in \mathrm{B}} ||u(x)||.$$

On note X la boule unité fermée de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ pour cette norme. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de X est le groupe orthogonal $\mathcal{O}(\mathrm{E})$.

On admettra que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$.

Exercice 172. (***) Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs. 0148-18

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la majoration $\dfrac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \dfrac{4}{n^2(n+1)^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k}$.

b. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ est convergente.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ est convergente et qu'il existe une constante K telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots a_n} \leqslant \mathrm{K} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k},$$

cette constante étant indépendante de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$.

c. Montrer que la constante $\mathrm{K} = 2$ est optimale.

Exercice 173. (***) On fixe $s \in \mathbb{C}$. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{A}_n = a_1 + \cdots + a_n$. 0170-18

a. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^s} = \frac{\mathrm{A}_n}{n^s} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right)$.

b. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\mathrm{A}_n = \mathcal{O}(n^\alpha)$ et $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.
Montrer alors que la série $\sum n^{-s} a_n$ est convergente.

c. On suppose maintenant que les a_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$.
Pour tout $x \geqslant 0$ et tout $\lambda > 0$, prouver la majoration $\mathbb{P}(|\mathrm{A}_n| \geqslant x) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{A}_n})$.

d. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, prouver la majoration $\mathrm{ch}(a) \leqslant \mathrm{e}^{a^2/2}$. En déduire la majoration $\mathbb{P}(|\mathrm{A}_n| \geqslant x) \leqslant 2\mathrm{e}^{-x^2/(2n)}$.

Exercice 174. (***) On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. 0195-18

a. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant a \leqslant b$, montrer l'inégalité

$$|f(x(b)) - f(x(a))| \leqslant \frac{1}{2} \int_a^b \left(||x'(u)||^2 + ||\nabla f(x(u))||^2 \right) \, \mathrm{d}u.$$

b. Cas d'égalité.

Exercice 175. (***) Pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. 0356-18

Pour tout triplet (X, Y, Z) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, prouver l'égalité $[[X, Y]^2, Z] = 0$.

Exercice 176. (***) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$. 0376-18

a. Montrer que λ est une valeur propre de M si et seulement si λ^2 est une valeur propre de A.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 177. (***) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes, dont les limites sont notées respectivement α et β. 0390-18

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Étudier la convergence de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 178. (***) Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives. Soit $\ell > 0$. 0408-18

On suppose que $f(x) \times \displaystyle\int_0^x f(t)^2 \, \mathrm{d}t$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

a. Si f admet une limite en $+\infty$, quelle est-elle ?

b. Trouver un exemple de fonction f vérifiant l'hypothèse ci-dessus.

c. Dans le cas général, trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 179. (***) On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 0144-18

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par addition et par produit par un réel positif.

b. Pour tout vecteur colonne u de $\mathbb{R}^n$, montrer que $u \cdot u^{\mathrm{T}}$ est un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

c. Soit M une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

d. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $A \odot B$ leur *produit de Hadamard*, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}b_{i,j}$.
Montrer que $A \odot B$ est un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

e. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$. Soit $c \geqslant 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
On considère la matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $s_{i,j} = (u_i^{\mathrm{T}} \cdot u_j + c)^k$. Montrer que cette matrice appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 180. (***) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en moyenne* vers ℓ signifie 0187-18

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

a. Montrer que la convergence vers ℓ implique la convergence en moyenne vers ℓ.

b. Montrer que toute suite périodique converge en moyenne.

c. Soit $p \in \mathbb{N}$. La convergence en moyenne de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ implique-t-elle celle de la suite $((u_n)^p)_{n\geqslant 1}$?

d. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge en moyenne, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne.
