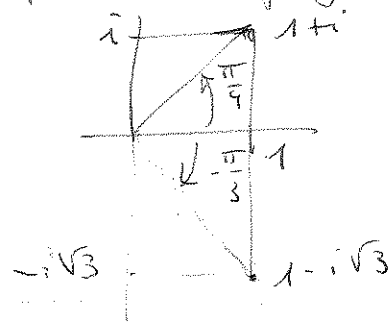


Mardi 22 mai 2018 - nombres complexes et polynômes

Ex 2. a) $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i\sqrt{3} = 2 e^{-i\pi/3}$

donc $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}} \right)^{10} = \frac{e^{i\frac{70\pi}{12}}}{2^5}$



$z = \frac{e^{-i\pi/6}}{32} = \frac{1}{32} \times \frac{1}{2} (\sqrt{3}-i)$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}}{64}$
 $\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{64}$

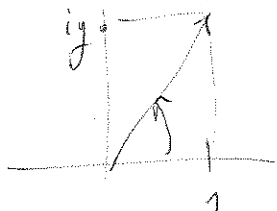
b. Analyse. Soit P mon. dans $\mathbb{R}[X]$ tq $P(z)=0$.
 Alors $P(\bar{z})=0$ donc P est divisible par $(X-z)(X-\bar{z})$.

Réciproque. $(X-z)(X-\bar{z})$ convient.
 C'est donc une solution de degré minimal.

$$(X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$$

$$= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{32}X + \frac{1}{32}$$

Ex 3.



$$\text{Arg}(1+iy) = \text{Arctan}(y)$$

$$\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(8) = \text{Arg}((1+i2)(1+i5)(1+i8)) \quad [2\pi]$$

$$\alpha = (-9+7i)(1+8i) = -65-65i = 65\sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\theta \equiv \frac{5\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \text{Arctan}\left(\frac{2}{5}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

donc

$$\boxed{\theta = \frac{5\pi}{4}}$$

Ex 4.

Notons $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X^n - n$.

$$P_n(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$$

$$P_n' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$$

$$P_n'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = 0$$

$$P_n'' = n(n+1)(n+2)X^n - (n+2)(n+1)nX^{n-1}$$

$$P_n''(1) = 0$$

$(X-1)^3$ divise P_n .

Ex 5.

a. $P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)X - \alpha\beta\gamma$

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \boxed{S_1=0} \quad 0 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$$

donc

$$\boxed{S_2 = -2}$$

$$\alpha\beta\gamma = -1$$

$$\boxed{S_3 = -S_1 - S_0 = -3}$$

$$S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$$

$$S_{k+3} + S_{k+1} + S_k = 0$$

b.

$$\boxed{S_4 = -S_2 - S_1 = 2}$$

$$\boxed{S_0 = 3}$$

Ex 7. Chez les constantes, il y a 0 et 1 et c'est tout.

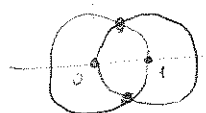
Analyse. Soit P pol non const. Soit z une racine complexe de P .
 $P(z^2) = P(z+1)P(z) = 0$ donc z^2 est aussi une racine de P , puis z^4
 puis $z^8, \dots, z^{2^n}$ etc.

P n'a qu'un nombre fini de racines donc il existe n et m dans $\mathbb{N}$
 tels que $n < m$ et $z^{2^n} = z^{2^m}$ donc $z = 0$ ou $z^{2^m - 2^n} = 1$

donc $z = 0$ ou $|z| = 1$.

$P((z-1)^2) = P(z)P(z-1) = 0$ donc $(z-1)^2$ est une racine de P
 donc $(z-1)^2 = 0$ ou $|z-1|^2 = 1$. Ainsi, $z = 0$ ou $z = 1$ ou $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z-1| = 1 \end{cases}$.

Le troisième cas équivaut à $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Notons $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.



Si $P(w) = 0$, alors $P(\bar{w}) = 0$ avec la même multiplicité.

P est de la forme $\lambda X^a (X-1)^b (X-w)^c (X-\bar{w})^c$

c'est-à-dire $\lambda X^a (X-1)^b (X^2 - X + 1)^c$.

$$P(X^2) = \lambda X^{2a} (X^2-1)^b (X^4 - X^2 + 1)^c$$

$$P(X)P(X+1) = \lambda^2 \underbrace{X^a (X-1)^b (X^2 - X + 1)^c}_{P(X)} \underbrace{(X+1)^a X^b (X^2 + X + 1)^c}_{P(X+1)} \lambda$$

unicité de la factorisation $\rightarrow \lambda = 1$ et $a = b$.

~~P est de la forme $[X(X-1)]^a (X^2 - X + 1)^c$.~~

Réciproque. On peut voir que les polynômes de cette forme

~~Contiennent -~~ Pas du tout : Ça implique aussi $c = 0$

$\rightarrow$ solution de Mehdi présentée en classe.

Ex 6. $P(a+t) = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!} t^k$ si $d \geq \deg(P)$ (formule de Taylor).

$$P(a+1) - P(a) - P'(a) = \sum_{k=2}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

$$P \text{ est solution } (\Rightarrow) \sum_{k=2}^d \frac{P^{(k)}(x)}{k!} = 0.$$

Ceux des $P^{(k)}(x)$ qui sont non nuls forment une famille libre donc l'égalité ci-dessus équivaut à $P''(x) = 0$

c'est-à-dire $P \in \mathbb{R}_1[X]$.

Ex 8. ~~$\nexists Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que~~ Notons $d = \deg(P)$.

Div euclidienne

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=n}^d a_k X^k.$$

$$P \circ P = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k P^k}_{\deg < \deg(P^n)} + \underbrace{\sum_{k=n}^d a_k X^k}_{\text{divisible par } P^n}$$

donc le reste est nul donc $\sum_{k=0}^{n-1} a_k P^k = 0$.

$(P^0, \dots, P^{n-1})$ est libre (degrés échelonnés) donc $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont nuls.

Donc $P = \sum_{k=n}^d a_k X^k \leftarrow$ divisible par X^n .

Ex 9. $3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = \underbrace{(9-2)}_{=7} (9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + \dots + 9 \times 2^{n-2} + 2^{n-1})$

ou bien récurrence, j'imagine.

En posant $u_n = 9^n - 2^n$, u_n est sol de la rel de réc associée à $(X-9)(X-2) = X^2 - 11X + 18$

donc
$$\begin{cases} u_{n+2} = 11u_{n+1} - 18u_n \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 7 \end{cases}$$

la réc double marche.