

Mercredi 23 mai 2018

Ex 11. 1. $\det(-Id_E) = (-1)^3 = -1$. $\det(f^2) = \det(f)^2 \geq 0$

donc $f^2 \neq -Id_E$. Si f était injectif, $f \circ (f^2 + Id_E) = 0$

donnerait $f^2 + Id_E = 0$, ce qui est faux, donc f n'est pas inj.

2. Analyse. Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f^2 + Id)$
tq $x = y + z$. Alors $f^2(x) = f^2(z) = -z$ donc

$z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$. Unicité sous réserve d'existence.

Synthèse. Soit $x \in E$. On pose $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$.
Alors $y + z = x$, $f(y) = (f + f^3)(x) = 0_E$ donc $y \in \text{Ker}(f)$

$f^2(z) = f^2(x) - f^2(y) = f^2(x) = -z$ donc $z \in \text{Ker}(f^2 + Id)$.
 $\dim(\text{Ker}(f^2 + Id_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \text{rg}(f) > 0$.

3. $\dim(\text{Ker}(f^2 + Id_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \text{rg}(f) > 0$.

4. $\begin{cases} f \neq 0 \\ f^3 + f = 0 \end{cases}$ donc $f^3 \neq 0$ donc $f^2 \neq 0$.

5. $(f^2 + Id)(f(x)) = 0 = (f^3 + f)(x) = 0_E$, $(f^2 + Id)(f^2(x)) = (f^3 + Id)(f(x)) = 0_E$

Hyp. $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0_E$ On applique f : $\alpha f^2(x) + \beta f^3(x) = 0_E$
c'est-à-dire $-\beta f(x) + \alpha f^2(x) = 0_E$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha L_1 - \beta L_2 \end{cases} f(x) = 0_E$
 $\neq 0_E$

donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. $(f(x), f^2(x))$ est libre.

6. $\dim \geq 2$ (Q5) et $\dim \leq 2$ car $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ Q1.

7. Soit y un vect. dir. de $\text{Ker}(f)$, de sorte que $(y, f(x), f^2(x))$ est notée B .

une base de E .
 $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y \\ f(x) \\ f^2(x) \end{matrix}$

Ex 30. a. $A = \text{Vandermonde}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$

donc $\det(A) = \prod_{0 \leq k < l \leq n-1} (\omega^l - \omega^k) = \prod_{0 \leq k < l \leq n-1} e^{i \frac{\pi}{n}(l+k)} \left(e^{i \frac{\pi}{n}(l-k)} - e^{-i \frac{\pi}{n}(l-k)} \right)$

$$= \prod_{0 \leq k < l \leq n-1} \left[i e^{i \frac{\pi}{n}(l+k)} \times \underbrace{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}(l-k)\right)}_{>0} \right]$$

$$\arg(\det(A)) = \sum_{\substack{0 \leq k < l \leq n-1 \\ \binom{n}{2} \text{ termes}}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}(l+k) \right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} + \frac{\pi}{n} \sum_{0 \leq k < l \leq n-1} (l+k)$$

$$2S_n = \sum_{0 \leq k < l \leq n-1} (l+k) + \sum_{0 \leq l < k \leq n-1} (l+k) = \sum_{k \neq l} (l+k) = \sum_{k, l} (l+k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} k - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \quad \text{donc } S_n = (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} k = (n-1) \times \frac{n(n-1)}{2}$$

puis $\arg = \frac{\pi}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} + \pi \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3\pi}{4} \times (n-1)(3n-2)$

b. $(\bar{A}A)_{p,q} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{p,k} a_{k,q} = \sum_{k=1}^n \omega^{-(p-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(q-1)}$

$$= \sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(q-p)} = \begin{cases} n & \text{si } p=q \\ \frac{1-\omega^{(q-p)n}}{1-\omega^{q-p}} = 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

donc $\bar{A}A = nI_n$ donc $|\det(A)|^2 = n^n$

$$\det(A) = n^{\frac{n}{2}} e^{i \frac{3\pi}{4} \times (n-1)(3n-2)}$$

Ex 23. $A_n = M_B(f)$ $B = (b_1, \dots, b_n)$.

$f(b_1) = b_1, f(b_2) = b_1 + b_2, \dots, f(b_n) = b_1 + \dots + b_n$.

Notons $C = (b_n, \dots, b_1)$. $M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} = {}^t A_n$.

Ex 27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$f(b_1) = b_1 + 3b_2 + 2b_3$

$f(b_2) = 2b_1 + b_2 + 3b_3$

$f(b_3) = 3b_1 + 2b_2 + b_3$

Il suffit de prendre

$c_1 = b_1$

$c_2 = b_3$

$c_3 = b_2$

But. $\begin{cases} f(c_1) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ f(c_2) = 3c_1 + c_2 + 2c_3 \\ f(c_3) = 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{cases}$

Ex 26. a. $\det(u^2) = \det(-Id_E)$ donc $(-1)^{\dim(E)} = \dim(u)^2 \geq 0$

donc $\dim(E)$ est pair.

b. si u laisse stable un sous-esp, sa dim est paire (m rais sur l'endomorphisme)

c. Soit $x_1 \in E \setminus \{0\}$. On peut voir que $(x_1, u(x_1))$ est libre.

(cf ex 11, QS).

Si $\dim(E) > 2$, il existe $x_2 \in E \setminus \text{Vect}(x_1, u(x_1))$.

On peut alors voir que $(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2))$ est libre.

Hyp. $\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 u(x_1) + \beta_2 u(x_2) = 0_E \\ -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 + \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = 0_E \end{cases}$

$\alpha_1 L_1 - \beta_1 L_2 \rightarrow (\alpha_1^2 + \beta_1^2)x_1 + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)x_2 = 0_E$

(x_1, x_2) est libre donc $\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2$ sont nuls.

On itère - On construit successivement $x_1, \dots, x_p$

avec la contrainte $x_{k+1} \notin \text{Vect}(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$ et

on montre que $(x_1, u(x_1), \dots, x_{k+1}, u(x_{k+1}))$ est libre

Ex 18. $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$ $M^T = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$

$$(M^T M)_{1,1} = m_{1,1}^2$$

$$(M M^T)_{1,1} = m_{1,1}^2 + m_{1,2}^2 + \dots + m_{1,n}^2$$

done $m_{1,2}, \dots, m_{1,n}$ sont nuls.

Idem sur les coefs diag suivants.
