

Jendredi 24 mai 2018

Ex 63. $f_n : x \mapsto x^n - x$. f_n est continue.

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

th val int $\rightarrow$ au moins une sol à $f_n(x) = 1$ dans $[1, +\infty[$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 1. \quad \forall x \geq 1, \quad f'_n(x) \geq n-1 > 0 \text{ donc une seule dans } [1, +\infty[.$$

Et aucune dans $[0, 1]$ évidemment.

Soit $\lambda > 1$. $f_n(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc

il existe n_λ tel que

$$\forall n \geq n_\lambda, \quad f_n(\lambda) > 1; \text{ ainsi}$$

$$\forall n \geq n_\lambda, \quad 1 \leq x_n \leq \lambda$$

Ceci prouve que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Notons $y_n = x_n - 1$.

$$x_n^n = x_{n+1}$$

$$\text{donc } x_n = \left(1 + y_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$x_n = e^{\frac{1}{n} \ln(1+y_n)} = e^{\frac{1}{n} \ln(2+y_n)} = e^{\frac{1}{n} \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{n} \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{donc } y_n = \frac{1}{n} \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ puis } x_n = e^{\frac{1}{n} \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$x_n = e^{\frac{1}{n} \ln(2) + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{y_n}{2}\right)} = e^{\frac{1}{n} \ln(2) + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \ln(2) + \frac{\ln(2)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \left[\frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln(2)}{n^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(2)}{n} \right]^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$x_n = 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln(2)(1 + \ln(2))}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Autre méthode:

$$x^n = x + 1 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}.$$

On pose $\varphi(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et on trouve un $DL_2(0)$

de φ^{-1} .

Ex 66. a. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$. f est dev en série entière.

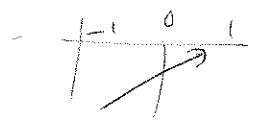
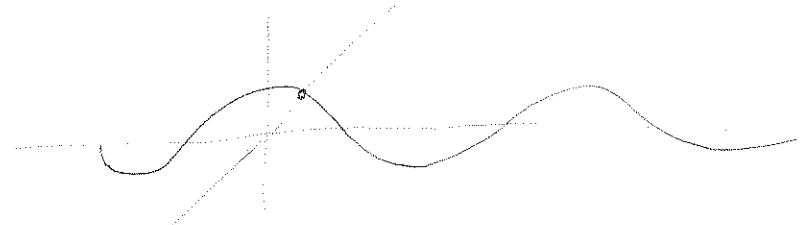
b. f est cont sur $\mathbb{R}$
 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$
 de plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2} (2n-1)}{n!} \geq \frac{1}{1}$ terme pour $n=1$
 donc f est str cr. don

Finalement, f est bij. $f' > 0$ donc f^{-1} est de classe C^∞ .

c. f est impaire donc f^{-1} aussi. $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
 $f(t) = t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{6} + o(t^5)$ $f^{-1}(f(t)) = t$ + unité dev lin
 $f^{-1}(f(t)) = a \left(t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{6} \right) + b \left(t + \frac{t^3}{2} \right)^3 + c t^5 + o(t^5)$
 $= at + \left(\frac{a}{2} + b \right) t^3 + \left(a + \frac{3}{2}b + c \right) t^5 + o(t^5)$
 l'unité du dev lin donne $\begin{cases} a = 1 \\ \frac{a}{2} + b = 0 \\ a + \frac{3}{2}b + c = 0 \end{cases}$

donc $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{4}$.

$$\boxed{f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)}$$



si $\cos(x) = x$, alors $x \in [-1, 1]$ donc $x \in [\cos(1), 1]$.

$\varphi: x \mapsto x - \cos(x)$ est str cr sur $[0, 1]$ donc φ s'annule au plus une fois.
 $\varphi(0) = -1, \varphi(1) \geq 0$ / φ s'annule au moins une fois. Vrai.
 Notons α ce point fixe.
 φ cont

Hyp. Existence de $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $f \circ f = \cos$.
 $(f' \circ f) \times f' = -\sin$. $f'(\alpha)^2 = -\sin(\alpha) \leq 0$
 Car $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
Faux.

Ex 70. Posons $g(x) = p f(a) + q f(b) - (p+q) f(x)$.
 $g(a) = q(f(b) - f(a))$ et $g(b) = p(f(a) - f(b))$
 signes opposés + cont : g s'annule quelque part.

Ex 69. Posons $F(x) = \int_0^x f$ et $g(x) = F(x)^2 - \int_0^x f^3$.
 $\forall x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = 2f(x)F(x) - f(x)^3 = f(x) \left[\underbrace{2F(x) - f(x)^2}_{\text{noté } h(x)} \right]$
 $\forall x \in [0, +\infty[$, $h'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0$ $h(0) = 0$ donc $h \geq 0$
 puis $g' \geq 0$ or $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$.
 si égalité, alors $\forall x \geq 0, h'(x) = 0$. si $f(x) \neq 0$ alors $f'(x) = 1$.
 sur tout intervalle où f ne s'annule pas, f est de la forme $x \mapsto x + t$.
 la seule possibilité est $f: x \mapsto x$.
 Réciproquement, il y a bien égalité pour $x \mapsto x$.

Ex 65.

a. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

b. $f(x+1) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} = x^{\frac{1}{x+1}} \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
 ceci tend vers 1

$\frac{f(x+1)}{f(x)} \sim x^{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}$

$g(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \quad g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

il existe $c_x \in]x, x+1[$ tq $g(x+1) - g(x) = g'(c_x) \left[\begin{matrix} \text{Acc} \\ \text{min} \end{matrix} \right]$

$g'(c_x) = O\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

$g'(c_x) \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$\frac{f(x+1)}{f(x)} \sim \exp[g'(c_x) \ln(x)]$ donc $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

c. ~~$f(x+1) - f(x) \sim (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$~~ $f(x) = e^{g(x) \ln(x)}$

$f'(x) = \left[g'(x) + \frac{g(x)}{x} \right] f(x)$

$f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$

ce truc tend encore vers 0.

d. Euh?