Mathématiques — préparation à l'oral — piste noire — indications

Séance du samedi 2 juin 2018 — algèbre linéaire

Exercices préliminaires

Préliminaire 1 : théorème de l'endomorphisme induit. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose qu'on connaît un supplémentaire H de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E.

Montrer que l'application $\tilde{u} : x \mapsto u(x)$, définie de H vers $\mathrm{Im}(u)$, est un isomorphisme.

Préliminaire 2 : caractérisation du rang d'une matrice. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note r son rang.

À l'aide du théorème de l'isomorphisme induit, montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{M} \times \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Utiliser le théorème de l'endomorphisme induit.

Exercice 47. Considérer l'endomorphisme $\Phi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposer qu'il existe une matrice M non nulle dans son noyau et appliquer la caractérisation du rang de M présentée ci-dessus.

Exercice 56. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout couple (P, Q) de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer l'égalité $||\mathrm{PAQ}|| = ||\mathrm{A}||$, où $||\ ||$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.

Exercice 57. Utiliser le résultat démontré dans l'exercice 38 : pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices MN et NM ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 175. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et de I_2. Qu'obtient-on dans le cas où M est de trace nulle ?

Exercice 176. Déterminer le noyau de $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_{2n}$.

Séance du samedi 16 juin 2018 — analyse de deuxième année

Exercice 102. Poser $\varepsilon_n = n\left(\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1\right) - \ell$, afin d'avoir

$$\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} = 1 + \frac{\ell}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

puis exploiter cela pour faire apparaître un télescopage et finir avec la règle de d'Alembert.

Exercice 103. Trouver une constante $\mathrm{C}(\varepsilon)$ strictement positive, dépendant de ε seulement, telle que

$$\forall z \in \Omega, \quad |1+z| \geqslant \mathrm{C}(\varepsilon)$$

et en déduire une majoration de $|\mathrm{T}_n(z)|$ par une quantité indépendante de z et de n.

Exercice 114. Raisonner par l'absurde : en supposant que la fonction f ne tend pas vers 0 en $+\infty$ et en exploitant la lipschitzianité, montrer qu'il existe $r > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle sur chaque segment $[x_n - r, x_n + r]$, la fonction f soit de signe constant, avec une intégrale minorée en valeur absolue par une certaine constante strictement positive.

Exercice 132. À la question b, prendre une fonction f réalisant le cas d'égalité ainsi qu'une fonction φ quelconque de F. Exploiter l'inégalité de l'énoncé en remplaçant φ par $f + \lambda\varphi$ puis démontrer l'égalité

$$\int_0^1 f\varphi - \mathrm{C}\int_0^1 f'\varphi' = 0.$$

Exercice 173. Les questions c et d apparaissaient dans l'épreuve de maths X-ENS de cette année. Non, ce n'est pas franchement une indication.
