

Vendredi 25 mai 2018

Ex 151. Univers des possibles $\Omega = \{\text{permutations de } [1, n]\}$

Une permutation est la liste des clés essayées ordonnées. $\# \Omega = n!$

Notons : le numéro de la bonne clé. $T = \text{nb de tentatives}$.
 $T(\Omega) = [1, n]$

$$\# [T=k] = \cancel{(n-1)} (n-1) \dots (n-k) \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la } k\text{-ième}}} 1 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la } (k+1)\text{-ième}}} (n-k-1) \times \dots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la } n\text{-ième}}} 1$$

nb de choix pour la 1^{re} clé essayée la (k-1)-ième

$$= (n-1)!$$

$$P(T=k) = \frac{1}{n} \quad \boxed{\text{Loi unif.}}$$

Ex 154. dé à n faces

① $X(\Omega) = [1, n]$ $[X=k] = \left([X_1=k] \cap [X_2 > k] \right) \cup \left([X_1 \geq k] \cap [X_2=k] \right)$

$$P(X=k) = P(X_1=k, X_2 > k) + P(X_1 \geq k, X_2=k)$$

$$= P(X_1=k) P(X_2 > k) + P(X_1 \geq k) P(X_2=k)$$

indép

$$= \frac{1}{n^2} [1 \times (n-k) + (n-k+1) \times 1] = \frac{2n-2k+1}{n^2}$$

(Ou dénombrement : $(k, n) \dots (k, k) \dots (n, k)$)

$$E(X) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(2n-2k+1)$$

~~somme arithmétique~~ ~~nb de termes~~

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

② $X+Y = X_1 + X_2$ donc $E(X) + E(Y) = n+1$ donc $E(Y) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$

③ $XY = X_1 X_2$ donc $E(XY) = E(X_1)E(X_2) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)^2}{36n^2} \left[\frac{9n^2 - (2n+1)(4n-1)}{1} \right] = \frac{(n+1)^2(n-1)^2}{36n^2}$$

$= 9n^2 - (8n^2 + 2n - 1)$

Ex 146. Univ des possibles $\Omega = \mathcal{P}_5(J)$ $J =$ ensemble des cartes.
 $\# \Omega = \binom{32}{5}$.

$A =$ [au moins une carte de chaque couleur].

$A_\spadesuit =$ [2 piques, 1 cœur, 1 carreau, 1 trèfle]

$$A = A_\spadesuit \cup A_\heartsuit \cup A_\diamondsuit \cup A_\clubsuit \quad \text{disj.}$$

$$\# A = 4 \# A_\spadesuit = 4 \times \binom{8}{2} \binom{8}{1} \binom{8}{1} \binom{8}{1} = 4 \times 28 \times 8^3.$$

$$P(A) = \frac{256}{899} \approx 0,285$$

Ex 150. $G_X(t) G_Y(t) = G_{X_0}(t) G_{Y_0}(t) = \left(\frac{t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6}{6} \right)^2.$

Notons $Q = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X.$

$$Q = X(X+1)(X^2 + X^2 + 1) = \underbrace{(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)}_{=}$$

G_X et G_Y sont des polynômes réels à coeffs positifs de degré 6

tg $G_X(0) = 0, G_Y(0) = 0, G_X G_Y = Q^2.$

G_X est divisible par X ~~mais pas~~ donc X est en facteur une seule fois.

G_Y Pour avoir un degré pair, il faut prendre $X+1$ aussi dans chaque.

Ensuite, ça va être $(X^2 \pm X + 1)(X^2 \pm X + 1)$ mais la seule répartition qui rendre les deux polynômes à coeffs ≥ 0 est celle avec $(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ dans les deux cas.

Ex 153.

1. Non: $P(X_2=1/X_1=n)=0 \neq P(X_2=1)$.

2. $Y_j \hookrightarrow G(p)$.

3. $X_1 \hookrightarrow B(n, p)$. ~~$X_2 \hookrightarrow B$~~

Sachant $[X_1=k]$, la loi cond de X_2 est $B(n-k, p)$.

$X_2(\Omega) = [0, n]$. $= 0$ si $j+k > n$

$$P(X_2=j) = \sum_{k=0}^n P(X_1=k) P(X_2=j|X_1=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{j} p^j (1-p)^{n-k-j}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} = \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \times \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$= \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} \text{ donc } P(X_2=j) = \binom{n}{j} p^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} p^k ((1-p)^2)^{n-j-k}$$

$$P(X_2=j) = \binom{n}{j} [p(1-p)]^j (1-p+p^2)^{n-j} \quad X_2 \hookrightarrow B(n, p(1-p)).$$

(nb de succès pour la réalisation (échec, succès) $\rightarrow$ plus direct!)

4. $N = \max(Y_1, \dots, Y_n)$

$N(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$[N \leq k] = [Y_1 \leq k] \cap \dots \cap [Y_n \leq k]$

donc $P(N \leq k) = P(Y_1 \leq k)^n = (1-(1-p)^k)^n$

$P(N > k) = 1 - (1-(1-p)^k)^n = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \binom{n}{l} (1-p)^{kl}$

$E(N) = \sum_{l=1}^n P(N \geq l) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N > k) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \binom{n}{l} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{kl}$

$= \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \binom{n}{l} \times \frac{1}{1-(1-p)^l}$