

Samedi 26 mai 2018 - piste noire

Ex 64. a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \leq \frac{a_p}{p} \leq \alpha + \varepsilon$.

Prenons $n \in \mathbb{N}^*$. Div end $n = pq + r$ $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

$$a_n \leq a_{pq} + a_r \leq q a_p + a_r$$

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} a_p + \frac{a_r}{n}$$

$$\text{mais } q = \frac{n-r}{p} \text{ donc } \frac{q}{n} = \frac{1}{p} - \frac{r}{np}$$

$$\text{donc } \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{1}{n} \left[a_r - \frac{r a_p}{p} \right]$$

Ceci prend au plus p valeurs différentes. Notons la plus grande :

$$\text{On obtient } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{\beta}{n} \leq \alpha + \varepsilon + \frac{\beta}{n}$$

$$\text{Il existe } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad \frac{\beta}{n} \leq \varepsilon.$$

Bilan: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \alpha \leq \frac{a_n}{n} \leq \alpha + 2\varepsilon$ donc $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$

b. Notons $a_n(x) = f^{(n)}(x) - x$.

$$a_{n+m}(x) = f^{(n+m)}(x) - x = f^n(f^m(x)) - f^m(x) + f^m(x) - x.$$

$$\text{Notons } p = \lfloor f^m(x) - x \rfloor. \quad x+p \leq f^m(x) \leq x+p+1$$

f^n est croissante:

$$p + f^n(x) = f^n(x+p) \leq f^n(f^m(x)) \leq f^n(x+p+1) = f^n(x) + p+1$$

$$\text{puis } f^n(x) - x - 1 \leq f^n(f^m(x)) - f^m(x) \leq f^n(x) - x + 1$$

Ensemble:

$$a_n(x) + a_m(x) - 1 \leq a_{n+m}(x) \leq a_n(x) + a_m(x) + 1$$

La suite $(a_n(x) + 1)_{n \geq 1}$ est sous-additive. Et voilà.

Ex 82. Exprimons x_n .

La relation de réc s'écrit $x_{n+1} = n x_n - n^2$.

La version « homogène » est $y_{n+1} = n y_n$: se résout en $y_n = (n-1)! y_1$.

On effectue la variation de la constante : $q_n = \frac{x_n}{(n-1)!}$

$$q_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n!} = \frac{x_n}{(n-1)!} - \frac{n^2}{n!} = q_n - \frac{n}{(n-1)!}$$

$$q_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (q_{k+1} - q_k) = x_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k-1)!}$$

$$\begin{aligned} &= x_1 - \sum_{l=0}^{n-2} \frac{l+1}{l!} = x_1 - \sum_{l=1}^{n-2} \frac{1}{(l-1)!} - \sum_{l=0}^{n-2} \frac{1}{l!} \\ &\stackrel{l=k-1}{=} x_1 - \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} - \sum_{l=0}^{n-2} \frac{1}{l!} = x_1 - 2e + \sum_{k=n-2}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{l=n-1}^{+\infty} \frac{1}{l!} \\ &= x_1 - 2e + \frac{1}{(n-2)!} + 2 \underbrace{\sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{R_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{(n-1)!} x_n = (n-1)! (x_1 - 2e) + (n-1)! + 2 \underbrace{\sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{k!}}_{= (n-1)! R_{n-1}}$$

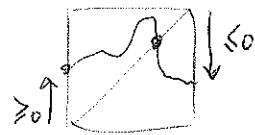
$$0 \leq (n-1)! R_{n-1} \leq \sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{k-(n-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n-2} \leq 2$$

$$x_n = (n-1)! (x_1 - 2e) + n + O(1).$$

Ex 71. a. $g(x) \stackrel{\text{def}}{=}} f(x) - x.$

$g(a) \geq 0, g(b) \leq 0, g \text{ cont}$

th val int.



b. ~~Notons $A = \{(s, t) \in J\}$ s'écrit $[\alpha, \beta]$.~~

Notons $A = \{(s, t) \in [a, b]^2; f(s) = \alpha, f(t) = \beta\}.$

c'est un fermé borné $\rightarrow$ critère séquentiel

On définit $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$
 $(s, t) \mapsto |s - t|$

φ est continue sur A donc φ admet un minimum.

Soit $(s_0, t_0) \in A$ tq $\varphi(s_0, t_0) = \min_A \varphi.$

Pour simplifier, supposons que $s_0 < t_0$ (l'autre cas se traite pareil).

Déjà, $J \subset f([s_0, t_0])$ (th des val int).

Supposons que l'inclusion soit stricte. Il existe alors $u \in]s_0, t_0[$

tq $f(u) > \beta$ ou $f(u) < \alpha.$

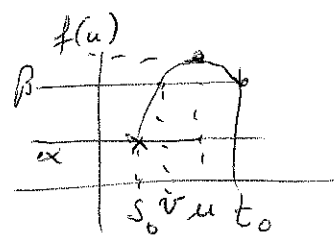
Rettons que $f(u) > \beta$ (l'autre cas se traite pareil).

Par le th des val int, il existe $v \in]s_0, u[$

tq $f(v) = \beta.$

$\begin{cases} (s_0, v) \in A \\ 0 < v - s_0 < t_0 - s_0 \end{cases}$

donc $\varphi(s_0, v) < \varphi(s_0, t_0)$
 contradiction.



L'inclusion n'est pas stricte: $f([s_0, t_0]) = J.$

Ex 80.

$$\sum_{n=0}^{N-1} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N-1} n a_n - \sum_{n=0}^{N-1} n a_{n+1}$$

plus simple

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (n a_n - (n+1) a_{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}$$

$$= -N a_N + \sum_{k=1}^N a_k$$

pas d'hyp
de décr.

① Si $\sum n(a_n - a_{n+1})$ conv et $N a_N \rightarrow 0$, alors $\sum a_k$ conv.

② Hyp: $\sum a_n$ conv.

$$\sum_{n=N+1}^{2N} a_n \geq N a_{2N} \geq 0 \text{ donc } 2N a_{2N} \rightarrow 0$$

$$0 \leq (2N+1) a_{2N+1} \leq (2N) a_{2N} + a_{2N} \text{ donc } (2N+1) a_{2N+1} \rightarrow 0$$

$$\text{donc } N a_N \rightarrow 0 \text{ et } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ conv.}$$

Préparatif à 177 et 180: [Th de Césaro.]

180a. Hyp. $u_n \rightarrow l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - l \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (u_k - l) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \varepsilon$$

$$| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\text{constante}}_C + \varepsilon. \text{ Il existe } n_1 \geq n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_1, \frac{C}{n} \leq \varepsilon$$

Bilan: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1, \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - l \right| \leq 2\varepsilon$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l.$$

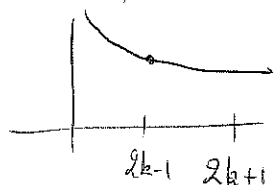
Ex 180. c. OK si $p=0$ ou $p=1$.

$p=2$. Essayons $u_k = (-1)^k \sqrt{k}$.

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \cancel{\sqrt{1}} - \sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} \dots - \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Autre approche.



$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \int_{2k-3}^{2k-1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 + 2(\sqrt{2n-1} - 1)$$

Bref. $(u_n)_{n \geq 1}$ conv en moy vers 0.

$$u_n^2 = n, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^2 = \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

} donc non pour $p=2$.

Idem si $p=2\ell$: on prend $u_k = (-1)^k k^{\frac{1}{2\ell}}$.

$p=3$. Essayons $x_k = (-1)^k k^{2/3}$.

$$\text{D'ailleurs, } 0 \leq \sum_{k=1}^{2n} x_k \leq \sum_{k=1}^n ((2k)^{2/3} - (2k-1)^{2/3}) = \sum_{k=1}^n \int_{2k-1}^{2k} \frac{dt}{t^{1/3}} \cdot \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \int_1^{2n} \frac{dt}{t^{1/3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc conv en moy vers 0.

$$\sum_{k=1}^{2n} (x_k)^3 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{\ell=1}^n [(2\ell)^2 - (2\ell-1)^2] = \sum_{\ell=1}^n (4\ell - 1)$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (x_k)^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Si $p=2\ell+1$, on prend $u_k = (-1)^k k^{\frac{2}{2\ell+1}}$.

Ex 177 :
$$C_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \beta}_{\text{note } d_n} + \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k (b_{n-k} - \beta)}_{\text{note } d_n}$$

Ceci tend vers $\alpha \beta$ par le th de Cesàro

La suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est conv donc bornée : $|a_k| \leq \|a\|_\infty$

$$|d_n| \leq \|a\|_\infty \times \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |b_{n-k} - \beta| = \|a\|_\infty \times \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n |b_l - \beta|}_{\rightarrow 0 \text{ par Cesàro}}$$

donc $d_n \rightarrow 0$ et $C_n \rightarrow \alpha \beta$.

Ex 180 : b On prend une suite de période $p \geq 1$: $u_{n+p} = u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Div end : $n = pq + r$.

$$\sum_{k=1}^n u_k = q \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=1}^r u_k = \frac{n-r}{p} \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=1}^r u_k$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p u_k}_{\text{Constante}} + \frac{1}{n} \left[-\frac{r}{p} \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=1}^r u_k \right]$$

p valeurs possibles

donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p u_k$

Exemple : $u_k = (-1)^k$ conv en moy vers $\frac{1 + (-1)}{2} = 0$.

Ex 180-d. Là, on s'aventure vraiment sur le sévère.

Hypo $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$

$$\underline{\text{Mg:}} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \longrightarrow f(\ell).$$

Notons L la limite en question.

Notons L la limite en question.
On va décaler la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ avec la constante l :

[illegible]

$$\frac{1}{2^l} \sum_{k=1}^2 x_k = \frac{1}{2^l}$$

$$\underbrace{u_1}_{1} \underbrace{ll}_{2} \underbrace{u_2 u_3 u_4 u_5}_{4} \underbrace{ll \dots l}_{8} \underbrace{u_6 \dots u_{21}}_{16} \underbrace{l \dots l}_{32} \text{ etc}$$

$$\frac{1}{2^{2\Delta}-1} \sum_{k=1}^{2\Delta-1} x_k = \frac{1}{2^{2\Delta}-1} \left[\sum_{k=1}^{\frac{2\Delta-1}{3}} u_k + \frac{2(2^{2\Delta}-1)l}{3} \right]$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{1}{2^{2n}-1} \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_k) = \frac{1}{2^{2n}-1} \left[\sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_k) + \frac{2}{3}(2^{2n}-1)f(l) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{L}{3} + \frac{2}{3}f(l)$$

$$\frac{1}{2^{2s+1}-1} \sum_{k=1}^{2^{2s+1}-1} f(x_k) = \frac{1}{2^{2s+1}-1} \left[\sum_{k=1}^{2^{2s+1}-1} f(x_k) + \frac{2}{3}(2^{2s}-1)f(l) \right] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{2L}{3} + \frac{f(l)}{3}$$

Unité de la limite $\rightarrow L = f(l)$.

Quitte à remplacer f par $f - f(0)$, on suppose que $f(0) = 0$.

On note de la même $\Rightarrow \dots$
 Quitte à remplacer f par $f - f(0)$, on sup. que $f(0) = 0$.
 Prenons $u_k = (-1)^k x$ conv moy vers 0 $(f(u_k))_{k \geq 0}$ conv moy vers $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et vers $f(0) = 0$

done fest impaire.

donc f est impaire.
Prenons $u_0 = x, u_1 = y, u_2 = -x-y$ puis 3-pér. On en déduit $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ qui conv en moyenne, la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ conv en moy.

On ajoute $f(0)=0$

f est-elle obligatoirement continue en 0? $\leftarrow$ Oui.

$$\forall r > 0, \exists x(r) \in]-r, r[$$

Hyp. $f(t) \not\rightarrow 0$ $\quad$ Existence de $\varepsilon_0 > 0$ tq $\forall \delta > 0, \exists x \in]-\delta, \delta[$ $|f(x)| \geq \varepsilon_0$

On peut construire $(x_n)_{n \geq 1}$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \neq 0$.

Ça doit permettre de décaler cette suite pour avoir une absence de conv.

$$x_1, 0, x_3, x_4, 0, 0, 0, 0, x_9, \dots, x_{16}, \underbrace{0, \dots, 0}_{16}, x_{33}, \dots, x_{64}, \underbrace{0, \dots, 0}_{64}, x_{129}, \dots, x_{256}$$

$$y_k = \begin{cases} x_k & \text{si } 2^{l-1} < k \leq 2^{2l} \\ 0 & \text{si } 2^{2l} < k \leq 2^{2l+1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2^{2l}} \sum_{k=1}^{2^{2l}} f(y_k) = \frac{f(x_1) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_9) + \dots + f(x_{16}) + \dots + f(x_{2^{2l-1}+1}) + \dots + f(x_{2^{2l}})}{2^{2l}}$$

$$\text{Nb de termes au numérateur} = 1 + 2 + 8 + \dots + 2^{l-1} = 1 + 2 \times \frac{4^l - 1}{4 - 1}$$

bref, ceci tend vers $\frac{2}{3} l$

$$\frac{1}{2^{2l+1}} \sum_{k=1}^{2^{2l+1}} f(y_k) = \frac{\text{idem}}{2} \quad \text{ceci tend vers } l/3.$$

Yes!

Ça nécessite tout de même Cesàro (et peut-être même Bolzano-Weierstraß ~~à l'envers~~).

Forcément, f est bornée au vois de 0 : $\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) < +\infty$ et $\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) > -\infty$.
Sinon, il existe $(x_n)_{n \geq 1}$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $f(x_n) \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$.

~~En fait, c'est encore mieux: pour toute suite~~

f est continue sur $\mathbb{R}$ plus généralement.