

Mardi 29 mai 2018

Ex 72. $\sqrt{n^2+n+1} = n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + O(u^3)$$

$$= n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = n \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$= n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + O(u^3)$$

$$\sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma} = n \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

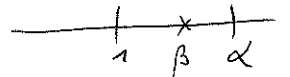
$$= n \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} \right) - \frac{1}{9} \frac{\alpha^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$= n + \frac{\alpha}{3} + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) + \left[\frac{3}{8} + \frac{\alpha^2}{9} - \frac{\beta}{3} \right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\sum u_n \text{ conv} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3/2 \\ \beta = 3 \left(\frac{3}{8} + \frac{\alpha^2}{9} \right) = 3 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8} \end{cases}$$

si $\alpha > 1$,



Ex 73. a. $\frac{a_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$

previous $\beta = \frac{1+\alpha}{2} \in]1, \alpha[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$, $\frac{a_n}{\ln(n)} \geq \beta$

donc $0 \leq \exp(-a_n) \leq e^{-\beta \ln(n)} = \frac{1}{n^\beta}$ or $\beta > 1$ donc conv.

Et inversement si $\alpha < 1$.

b. $\sum \frac{1}{n}$ div, $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$ conv (composée-int)

$$\frac{1}{n} = e^{-\ln(n)}$$

$$\frac{1}{n \ln(n)^2} = \exp(-[\ln(n) + 2 \ln(\ln(n))])$$

or $\ln(n) + 2 \ln(\ln(n)) \sim \ln(n)$ $n \rightarrow +\infty$

Ex 7b.

1.a. $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right) = \frac{a-b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1.b. $= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ donc $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ div. Termes négatifs donc Sommes part $\rightarrow -\infty$

2.a. $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum [\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)]$ conv abs donc conv donc la suite $(\ln(v_n))_{n \geq 0}$ conv.

2.b. $\ln(v_n) \rightarrow C$, $v_n \rightarrow e^C$, $u_n \sim \frac{e^C}{n^{b-a}}$

2.c. $b-a > 1$ donc $\sum u_n$ conv.

3. $\sum_{n=0}^N ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n) = 0$

car

$\sum_{n=0}^N ((n+1)u_{n+1} - nu_n) = (N+1)u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

donc $\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n) = 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)u_{n+1} - nu_n) = 0 \end{cases}$

Soustraction $(b-1) \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$
 $= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_0$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \times \frac{b-1}{b-a-1}$

Ex 75. $\cos(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right| \leq \frac{1}{(2N+2)!} \quad (\text{th séries alt}).$$

Il suffit de choisir N tq $\frac{1}{(2N+2)!} \leq 10^{-n}$
 et de prendre $\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ comme val app.

Ex 81. $u_n \stackrel{\text{def}}{=} (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$.
 c'est un entier pair. (formule du binôme ou réc)

$$\sin(\pi (1+\sqrt{2})^n) = - \sin(\pi (1-\sqrt{2})^n) \quad \text{conv abs.}$$

Ex 74.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
parité de $n(n+1)/2$	imp	imp	p	p	imp	imp	p	p

$$u_{4k+1} + u_{4k+2} + u_{4k+3} + u_{4k}$$

$$u_{4k-1} + u_{4k} + u_{4k+1} + u_{4k+2} = \frac{1}{\sqrt{(4k-1)4k}} + \frac{1}{\sqrt{4k(4k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+1)(4k+2)}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+2)(4k+3)}}$$

$$= \frac{1}{4k} \left[\left(1 - \frac{1}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\left(1 + \frac{1}{4k}\right) \left(1 + \frac{2}{4k}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\left(1 + \frac{2}{4k}\right) \left(1 + \frac{3}{4k}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{4N+2} u_n \rightarrow S \quad u_n \rightarrow 0 \text{ donc } \sum_{k=1}^{4N+2} \rightarrow S \text{ aussi si } \varepsilon = 0, 1 \text{ ou } 3.$$

ou plus simple: $\sum (u_{2k-1} + u_{2k})$ conv par le th des séries alt.