

Mercredi 30 mai 2018

Ex 32. 1. $\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - t(A)t + \det(A) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ rang 1 $\dim(E_1(A)) = 1$ $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. But: base (U_1, U_2) tq $AU_1 = U_1, (A - I_2)U_2 = U_1$.

Il suffit de prendre $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

convent : $B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (S) $\Leftrightarrow X' = AX \Leftrightarrow X' = PBP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = BP^{-1}X$

$\Leftrightarrow Y' = BY$ en posant $Y = P^{-1}X$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y_1 U_1 + y_2 U_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = y_1(t) + c_1 e^t \\ y_2(t) = c_1 e^t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = c_1 t e^t + c_2 e^t \\ y_2(t) = c_1 e^t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (c_1 t e^t + c_2 e^t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex 35. 1. Th spectral.

2. U vect pr associé.

$(A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A)U = (\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)U = 0$

$\begin{cases} AU = \lambda U \\ U \neq 0 \end{cases}$

donc $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$

3. $\lambda = 0$ ou $\sum_{k=0}^4 \lambda^k = 0$ dans ce cas, et $\lambda \neq 1$ et $\lambda^5 = 1$ impossible

donc $\lambda = 0$.

A est sembl à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A = 0$.

Ex 38.

~~det~~ ~~(A-I_n)~~

$$AB = A(BA)A^{-1}$$

AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$.

On retire l'hyp d'inv.

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$. On perturbe A en $A - tI_n$, qui est inv pour tout t en dehors d'un ensemble fini.

$\det(\lambda I_n - (A - tI_n)B) = \det(\lambda - B(A - tI_n))$ est vrai pour une infinité de t et ce sont des polynômes en t donc les polynômes sont égaux donc ça marche aussi pour $t=0$.

Ex 42. B laisse stables les esp pr de A. Les esp pr de A sont de dim 1 donc toute base de diag pour B en est une pour A. C'est nul!

Ex 41. a. $P = aX^n + Q$ $\deg(A(Q)) \leq n$

$$f(X^n) = nX^{n+1} - (X^2-1)nX^{n-1} = nX^{n-1}.$$

b. Star Analyse. $f(P) = \lambda P$ $(X^2-1)P'(X) = (nX-\lambda)P(X)$.

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad P'(t) = \frac{nt-\lambda}{t^2-1} P(t). \quad \frac{nt-\lambda}{t^2-1} = \frac{\frac{n+\lambda}{2}}{t+1} + \frac{\frac{n-\lambda}{2}}{t-1}$$

$$\text{il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in]-1, 1[, \quad P(t) = c(1+t)^{\frac{n+\lambda}{2}}(1-t)^{\frac{n-\lambda}{2}}.$$

Pour avoir un polynôme, on fait en sorte que $\frac{n+\lambda}{2}$ soit un entier k, c'est-à-dire $\lambda = 2k - n$.

Synthèse. Pour tout $k \in [0, n]$, posons $P_k = (1+x)^k(1-x)^{n-k}$.
c'est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\text{et on trouve } f(P_k) = (2k-n)P_k$$

$n+1$ val pr
 $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de diag.

Ex 33 - 1. $\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-5 & 1 & 3 \\ -3 & t-1 & 3 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - 7t^2 + 14t - 8 = (t-1)(t-2)(t-4)$
diag.

2. les matrices diagonales

3. Comme dans l'ex 32, M est diag donc $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$ et réc.

4. $X^2 = A \Leftrightarrow X = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.
