Mathématiques avec Python — préparation à l'oral

Échauffons-nous avec quelques boucles

Exercice 1. Écrire une fonction `nombre9(n)` qui renvoie le nombre de 9 terminant l'écriture décimale d'un entier n donné.

Écrire une fonction `avant9(n)` qui renvoie le chiffre situé à gauche du bloc de chiffres 9 terminant l'écriture de l'entier n. Cette fonction renvoie 0 si l'entier n ne s'écrit qu'avec des 9.

Exercice 2. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers en posant $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = a_n, \quad a_{2n} = a_n + a_{n-1}.$$

a. Écrire une fonction `a(n)` récursive qui renvoie la valeur de a_n. On vérifiera que a_{534} vaut 59.

b. Écrire une fonction `tab_a(n)` qui renvoie la liste $[a_0, \dots, a_n]$.

On pourra prolonger cet exercice en exprimant la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en en déduisant une expression raisonnablement simple de a_n.

Traçons des graphiques

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $\mathrm{A}_n : \theta \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ sur $[-\pi, 3\pi]$.

Tracer le graphe de A_n pour tout n dans $[\![1, 10]\!]$ puis pour tout n dans $[\![100, 110]\!]$.

Exercice 4. Pour tout $t \neq -1$, on pose $x(t) = \frac{t}{1+t^3}$ et $y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$.

Tracer le support de cet arc paramétré. Estimer numériquement la longueur de la boucle.

Exercice 5. On note Γ la courbe tridimensionnelle paramétrée par

$$x(t) = (1+\cos(t))\cos(t), \quad y(t) = (1+\cos(t))\sin(t), \quad z(t) = 4\sin(t/2), \quad t \in [0, 2\pi].$$

a. Représenter cette courbe ainsi que ses projetés orthogonaux sur les plans $(\mathrm{O}xy)$, $(\mathrm{O}yz)$ et $(\mathrm{O}zx)$.

b. Calculer la longueur de cette courbe.

Matrices

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est noté χ_n.

a. Écrire une fonction en Python qui renvoie la matrice A_n.

b. Écrire une fonction en Python qui renvoie la plus grande valeur propre de A_n.

Exercice 7. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, on considère la matrice $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que les valeurs propres de $\mathrm{M}(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ dans l'ordre croissant.

a. Écrire une fonction `spectre(t)` qui prend un flottant t en entrée et renvoie le triplet $[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$.

b. Représenter graphiquement les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sur le segment $[-3, 3]$.

Analyse numérique

Exercice 8. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \geqslant 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(2\sqrt{x}\,\sin(t))\ \mathrm{d}t, \qquad \forall x \leqslant 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x}\,\sin(t))\ \mathrm{d}t.$$

Représenter la fonction φ sur $[-3, 5]$ et sur $[-1000, 0]$.

Exercice 9. On fixe un élément λ de $]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation $\mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = \lambda$.

On peut montrer que (E_n) possède dans $[0, +\infty[$ une unique solution. On la note a_n.

Calculer $a_n - n$ pour quelques valeurs de n et quelques valeurs de λ. Conjecturer un développement asymptotique de a_n.

Probas

Exercice 10. Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des X_k. On définit

$$\mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k.$$

Dans cette question, la loi des X_k est $\mathcal{B}(50, 1/50)$ et celle de N est $\mathcal{P}(1/12)$.
Écrire une fonction qui simule la variable aléatoire Y. Réaliser dix fois de suite une série de 1000 expériences et donner la moyenne et l'écart-type de Y.

Exercice 11. Aux cinq sommets d'un pentagone sont disposés des joueurs de discoplane. Au début du jeu, deux des joueurs, voisins immédiats, ont entre les mains un discoplane. Ils envoient leur discoplane à gauche ou à droite et les receveurs font de même à l'étape suivante. Le jeu s'arrête lorsque les deux discoplanes sont entre les mains d'un même joueur. Le nombre d'étapes du jeu est une variable aléatoire notée T.

Simuler cette expérience et estimer numériquement l'espérance de T.

Polynômes

Exercice 12. a. Écrire une fonction `legendre(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie en sortie le polynôme de Legendre de rang n, défini par

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n n!}((\mathrm{X}^2 - 1)^n)^{(2n)}.$$

b. Écrire une deuxième fonction ayant le même objectif, cette fois en se basant sur la construction par récurrence

$$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\mathrm{X}\mathrm{P}_n - \frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}.$$
