

Jendredi 31 mai 2018

Ex 104. 1. $|x - e^{i\theta}|^2 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + e^{i\theta}e^{-i\theta} = x^2 - 2\cos(\theta)x + 1.$

2. $x \neq \pm 1$ donc $x - e^{i\theta} \neq 0$ donc $|x - e^{i\theta}|^2 > 0.$

3.
$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos(\theta) + \frac{1}{x^2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1) \right] d\theta$$

$$= -2\pi \ln(|x|) + I(x).$$

4. $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta).$
 identités admises $1 - 2x^2\cos(2\theta) + x^4 = |x^2 - e^{i2\theta}|^2$
~~8/22~~ $= |x - e^{i\theta}|^2 \times |x + e^{i\theta}|^2 = (1 - 2x\cos(\theta) + x^2)(1 + 2x\cos(\theta) + x^2).$

5.a. C'est la question 2...

5.b. $2I(x) = I(x) + I(-x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x^2\cos(2\theta) + x^4) d\theta$

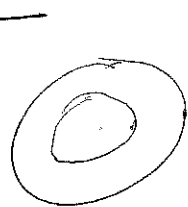
$$\stackrel{t=2\theta}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x^2\cos(t) + x^4) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (I(x^2) + \int_\pi^{2\pi} \ln(1 - 2x^2\cos(t) + x^4) d\theta)$$

$$2I(x) = I(x^2).$$

puis $t \rightarrow -t$

6. $I(x) = \frac{1}{2} I(x^2) = \frac{1}{4} I(x^4) = \dots = \frac{1}{2^n} I(x^{2^n}).$



prévois À partir d'un moment, $|x^{2^n}| \leq \frac{1}{2}.$

si $|z| \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq |e^{i\theta}| - |z| \leq |z - e^{i\theta}| \leq |z| + |e^{i\theta}| = \frac{3}{2}$

$-2\ln(\frac{1}{2}) \leq \ln(|z - e^{i\theta}|^2) \leq 2\ln(\frac{3}{2})$

donc $\left| \frac{1}{2^n} I(x^{2^n}) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $I(x) = 0$ (ici, $|x| < 1$).

si $|x| > 1, I(x) = 2\pi \ln(|x|) - I\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi \ln(|x|).$

Ex 112. $f: x \mapsto \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est def et cont sur $]0, +\infty[$.

si $\beta < 0$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ div gr.

si $\beta = 0, \alpha > 0$

idem

$\beta = 0, \alpha = 0, f(x) = \ln(2)$ div

si $\beta = 0, \alpha < 0$

$f(x) \sim \frac{1}{x^{-\alpha}}$

$\int_1^{+\infty}$ conv si $-\alpha > 1$
div si $-\alpha \leq 1$

$f(x) = \underbrace{\alpha \ln(x)}_{\text{inf}} + \underbrace{\ln(1+x^{-\alpha})}_{\rightarrow 0}$

$\int_0^1$ conv

si $\beta < 0, \alpha < 0$

$f(x) \sim \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$

$\int_1^{+\infty}$ conv si $\beta - \alpha > 1$
div si $\beta - \alpha \leq 1$

$f(x) \sim \frac{\alpha \ln(x)}{x^\beta}$

$\int_0^1$ conv si $\beta < 1$
div si $\beta \geq 1$

si $\beta > 0, \alpha = 0$

$f(x) = \frac{\ln(2)}{x^\beta}$ div.

si $\beta > 0, \alpha > 0$

$f(x) \sim \frac{\alpha \ln(x)}{x^\beta}$

$\int_1^{+\infty}$ conv si $\beta > 1$
div si $\beta \leq 1$

$f(x) \sim \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$

$\int_0^1$ conv si $\beta - \alpha < 1$
div si $\beta - \alpha \geq 1$

Ex 125. $f(x, t) = e^{-xt} \ln(t)$.

définition $x > 0$ fixé. $t \mapsto f(x, t)$ est déf et cont sur $]0, +\infty[$.

$|f(x, t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)|$ int sur $]0, 1]$. $|f(x, t)| = o\left(e^{-\frac{x}{2}t}\right)$ int sur $[1, +\infty[$.

- $t \mapsto f(x, t)$ est int sur $]0, +\infty[$.
- t fixé, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dér $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-xt} \ln(t)$.
- x fixé, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est cont sur $]0, +\infty[$.
- $a > 0$ fixé. $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t |\ln(t)| e^{-at}$ int même méthode.

Ex 117. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

- $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ cont par morceaux.
- $|f_n(x)| \leq 1$ int

$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

chg var $u = x^n$, $x = u^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du$

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

$$1 - I_n = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} du}_{J_n}$$

th conv dominée

$$J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln(u).$$

Ex 119. $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \ln(t^2)$. f cont sur $]0,1[$.

a.
 $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2 \ln(t)$ int.

~~Int~~ $f(t) = 2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} \times \ln(1-t) \ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \underbrace{2 \ln(2) \times \ln(1+t)(t-1)}_{\rightarrow 0 \text{ } t \rightarrow 1}$

fausse impr en 1.

b. $\forall t \in]0,1[$, ~~$\ln(t^2)$~~ $\ln(1-t^2) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$

$$f(t) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1} \ln(t)}{n} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{u_n(t)}$$

u_n int

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = - \int_0^1 t^{2n-1} \ln(t) dt = + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

int par parties.

Int terme à terme donc $\int_0^1 f(t) dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$.