

Vendredi 1^{er} juin 2018

Ex 93. rayon = 1 (d'Alembert)

$$\frac{n^2 + 4n - 1}{n+2} = n+2 - \frac{5}{n+2}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{dér: } \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) x^n = \frac{x+2}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \stackrel{\text{si } x \neq 0,}{=} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k-2}}{k} = \frac{1}{x^2} \left[-\ln(1-x) - x \right]$$

Ex 95. $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = |x - e^{i\pi/4}|^2 > 0$.
(ex 104)

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} = \frac{2(x - \cos(\frac{\pi}{4}))}{x^2 - 2x\cos(\frac{\pi}{4}) + 1} = \frac{x - e^{i\pi/4} + x - e^{-i\pi/4}}{(x - e^{i\pi/4})(x - e^{-i\pi/4})} = \frac{1}{x - e^{i\pi/4}} + \frac{1}{x - e^{-i\pi/4}}$$

$$= \frac{-e^{-i\pi/4}}{1 - x e^{-i\pi/4}} + \frac{-e^{i\pi/4}}{1 - x e^{i\pi/4}} = - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left[\left(e^{-i\pi/4} \right)^{n+1} + \left(e^{i\pi/4} \right)^{n+1} \right]$$

$$= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

Ex 97.

$$I_{n+1} = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^t (e^t - 1)^n dt}_{\text{intégrale positive pour } n \geq 0} - \underbrace{\int_0^{\ln(2)} (e^t - 1)^n dt}_{= I_n}$$

a.

$$I_{n+1} = \left[\frac{(e^t - 1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\ln(2)} - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

$$I_{n+1} \leq I_n \quad (\text{direct}) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+1} \leq 2I_n$$

$$\text{et } I_n + I_{n-1} = \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad 2I_n \leq \frac{1}{n}.$$

$$\frac{n}{n+1} \leq 2n I_n \leq 1 \quad \text{donc} \quad 2n I_n \rightarrow 1 \quad \boxed{I_n \sim \frac{1}{2n}}$$

b.

$$\text{rayon}(\sum I_n x^n) = \text{rayon}\left(\sum \frac{x^n}{n}\right) = \text{rayon}\left(\sum x^n\right) = 1.$$

c. Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\ln(2)} \underbrace{(e^t - 1)^n x^n}_{= u_n(t)} dt = \int_0^{\ln(2)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^t - 1)^n x^n \right) dt = \int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1 - (e^t - 1)x} = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-t}}{e^{-t}(1+x) - x} dt$$

$$= \left[\frac{-1}{1+x} \ln(e^{-t}(1+x) - x) \right]_{t=0}^{t=\ln(2)} = \frac{-\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)}{1+x}.$$

$$\frac{1+x-x}{2}$$

Ex 98.

a. $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$

prodde Cauchy

donc $x f(x)^2 = f(x) - u_0$

$\forall x \in]-1, 1[, \quad x f(x)^2 - f(x) + u_0 = 0.$

$\Delta(x) = 1 - 4u_0 x.$

$f(0) = u_0$ Gren
sur

forcément, $1 - 4u_0 x \geq 0$

donc $x \leq \frac{1}{4u_0}$

si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4u_0 x}}{2x}$

La fonction $\Sigma: x \mapsto \frac{2x f(x) - 1}{\sqrt{1 - 4u_0 x}}$ est cont, d'val dans $\{\pm 1\}$

donc constante. Le seul choix qui permette à f d'être continue

est $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4u_0 x}}{2x}$

b. on définit f ainsi sur $] -\frac{1}{4u_0}, \frac{1}{4u_0} [\setminus \{0\}$ avec $f(0) = u_0$ en prime.

$\forall t \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1+t} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{t}{2}\right)^n$

$a_n\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n-1)}$

$f(x) = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n-1)} (4u_0 x)^n = 2u_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n-1)} (4u_0 x)^{n-1}$

unicité.

$u_n = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2 (2n+1)} 2u_0 (4u_0)^n$

Pabo.

Ex 101.

a. Soit $\alpha \in [0, R_a[$. Soit $\beta \in [0, R_b[$.

$$\left. \begin{array}{l} a_n \alpha^n \rightarrow 0 \\ b_n \beta^n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ donc } a_n b_n (\alpha \beta)^n \rightarrow 0.$$

$$\alpha \beta \text{ décrit } [0, R_a R_b[\quad \text{donc} \quad \text{Rayon}(\sum a_n b_n z^n) \geq R_a R_b.$$

~~Soit $\alpha > R_a$. Soit $\beta > R_b$.~~

Il n'y a pas forcément égalité :

$$\text{avec } \sum z^{2n} \text{ et } \sum z^{2n+1}, \quad R_a = 1, R_b = 1,$$
$$\text{rayon}(\sum a_n b_n z^n) = 1 \quad (\text{car } a_n b_n = 0).$$

b. $R_a \stackrel{\text{def}}{=} \text{rayon}(\sum a_n z^n)$, $R_b \stackrel{\text{def}}{=} \text{rayon}(\sum \frac{1}{a_n} z^n)$.

$$R_a R_b \leq \text{Rayon}(\sum z^n) = 1.$$

Il n'y a pas forcément égalité.

$$\text{Prenons } \begin{cases} a_{2n} = 2^n \\ a_{2n+1} = \frac{1}{2^n} \end{cases}.$$

$$\text{Alors } R_a = \frac{1}{2}$$

$$R_b = \frac{1}{2}.$$