

Samedi 2 juin 2018

Ex 47. Considérons l'endomorphisme $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$.
 $M \mapsto AM - MB$
 On veut montrer que φ est surj. Ça revient à prouver qu'il est inj.

Soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$. $AM = MB$.

On va s'appuyer sur un résultat qui n'est pas au programme!

Lemme. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note $r = \text{rg}(M)$.
 Il existe alors des matrices P et Q de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que
 $P^{-1}MQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \leftarrow$ notée J_r

On suppose que M n'est pas nulle, on appelle r son rang et lui associe P et Q comme dans le lemme.

$APJ_rQ^{-1} = PJ_rQ^{-1}B$ donc $(\underbrace{P^{-1}AP}_{\text{notée } A_1}) J_r = J_r (\underbrace{Q^{-1}BQ}_{\text{notée } B_1})$

Décomposons par blocs $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & A_3 \\ \hline A_4 & A_5 \end{array} \right)$ $B_1 = \left(\begin{array}{c|c} B_2 & B_3 \\ \hline B_4 & B_5 \end{array} \right)$

$A_1 J_r = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & 0 \\ \hline A_4 & 0 \end{array} \right)$ $J_r B_1 = \left(\begin{array}{c|c} B_2 & B_3 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ donc $B_3 = 0, A_4 = 0$
 $A_2 = B_2$

$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & A_3 \\ \hline 0 & A_5 \end{array} \right)$ $B_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & 0 \\ \hline B_4 & B_5 \end{array} \right)$ $\chi_A = \chi_{A_1} = \chi_{A_2} \chi_{A_5}$
 $\chi_B = \chi_{B_1} = \chi_{A_2} \chi_{B_5}$

donc $\text{Sp}_\mathbb{C}(A) \cap \text{Sp}_\mathbb{C}(B) \neq \emptyset \rightarrow$ Faux.

Dém du lemme. $f: M_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\mathcal{B} =$ base canonique
 $u \mapsto Mu$ $M = M_{\mathcal{B}}(f)$.

On prend un suppl H de $\text{Ker}(f)$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et un suppl K de $\text{Im}(f)$.
 $M_{n,1}(\mathbb{R}) = H \oplus \text{Ker}(f)$ $M_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Im}(f) \oplus K$.

Soit $(h_1, \dots, h_r)$ une base de H , ~~qu'on complète en~~ $(h_1, \dots, h_n)$ soit $(h_{r+1}, \dots, h_n)$ une base de $\text{Ker}(f)$.

$\mathcal{H}$ de $\text{Im}(f)$ induit $\rightarrow (f(h_1), \dots, f(h_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

Soit $(k_{r+1}, \dots, k_n)$ une base de K .

Alors $M_{\mathcal{H}, \mathcal{H}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ + formule de ch de bases.

Samedi 2 juin 2018

Préliminaire: H de l'isomorphisme induit

soit $f \in L(E, F)$. On suppose qu'on connaît un suppl H de $\text{Ker}(f)$ dans E .

Alors $f : H \longrightarrow \text{Im}(f)$ est un isomorphisme.
 $x \longmapsto f(x)$

Dém. ~~lin~~ ~~Soit $y \in \text{Im}(f)$.~~

~~lin~~ Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x_0 \in E$ tq $f(x_0) = y$.
les solutions de $f(x) = y$ sont alors exactement les $x_0 + h$ $\left. \begin{array}{l} \\ h \in \text{Ker}(f) \end{array} \right\}$

L'écriture $E = H \oplus \text{Ker}(f)$ garantit qu'il existe

exactement un $h \in \text{Ker}(f)$ tq $x_0 + h \in H$ ($h = \text{proj de } -x_0 \text{ sur } \text{Ker}(f) \text{ parall à } H$).

Autrement dit, y admet exactement un antécédent par f dans H .

Ex 56. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $P^T A P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \|P^T A P\|^2 &= \text{tr} \left(\underbrace{(P^T A P)^T (P^T A P)}_{\text{sym}} \right) = \text{tr} (P^T A^2 P) \\ &= \text{tr} (A^2) = \|A\|^2 \\ \text{donc } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 &= \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 \quad \text{donc } i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0. \end{aligned}$$

Ex 57. ex 38 $\rightarrow \chi_{t_A A} = \chi_{A \cdot t_A}$

De plus, le th spectral donne que $t_A A$ et $A \cdot t_A$ sont diag.
Elles sont semblables à la même matrice diagonale.

Ex 175. Lemme Pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{C})$,
 $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$.
Dém. $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ $\text{tr}(M)M = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$ Bref, calcul.

$\text{tr}([X, Y]) = 0$ donc $[X, Y]^2 = -\det(M)I_2$ donc il commute avec Z .

Ex 19. si $v = u \circ f$, alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(v)$.
Hyp. $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(v)$. On veut écrire en un certain sens $u = v \circ f^{-1}$.

Sauf que f n'est pas réputée bij. On utilise le th de l'isom induit.
 $E = H \oplus \text{Ker}(f)$. $\tilde{f}: H \rightarrow \text{Im}(f)$ $F = \text{Im}(f) \oplus K$.
 $x \mapsto f(x)$ $y = p(y) + q(y)$

On définit alors $u: F \rightarrow G$ par $u(y) = v(\tilde{f}^{-1}(p(y)))$.

Pour tout $x \in E$, on obtient $u(f(x)) = v(\tilde{f}^{-1}(p(f(x))))$
 $= v(\tilde{f}^{-1}(f(x))) = v(\tilde{f}(p_1(x)))$
 $= v(p_1(x))$
 $= v(x)$ car $v(p_2(x)) = 0$.
 $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(v)$.

Samedi 2 juin 2018.

Ex 57. ${}^t A \cdot A$ et $A \cdot {}^t A$ sont diagonalisables (th spect)
et ont même poly car (ex 38!).

Ex 176. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbb{C})$.

a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$MY = \begin{pmatrix} y_2 \\ AY_1 \end{pmatrix}.$$

$$MY = \lambda Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = \lambda y_1 \\ AY_1 = \lambda y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = \lambda y_1 \\ AY_1 = \lambda^2 y_1 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(B - \lambda I_{2n}) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}; y_1 \in \text{Ker}(A - \lambda^2 I_n) \right\}.$$

$\lambda \in \text{Sp}(B) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \text{Sp}(A)$ et $y_1 \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$ est un isom
de $E_{\lambda^2}(A)$ sur $E_\lambda(B)$ le cas échéant.

$$\begin{aligned} \text{b. } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) &= \dim(\text{Ker}(A)) + 2 \sum_{\substack{\mu \in \text{Sp}(A) \\ \mu \neq 0}} \dim(E_\mu(A)) \\ &= 2 \sum_{\mu \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\mu(A)) - \dim(\text{Ker}(A)) \end{aligned}$$

B diag $\Leftrightarrow A$ diag et dv.