

Mardi 5 juin 2018

Ex 87. $f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$

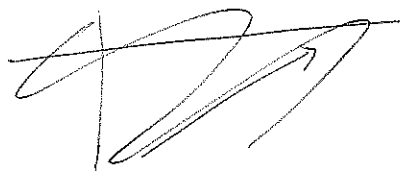
soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. $\sin(t) \in [0, 1[$ donc $n \sin^n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

ou simple vers la fonction nulle.

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], f_n'(t) = n(-\sin^{n+1}(t) + n \cos^2(t) \sin^{n-1}(t))$$

$$= \underbrace{n \sin^{n-1}(t)}_{\geq 0} [n \cos^2(t) - \sin^2(t)].$$

si $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f_n'(t) = n \sin^{n-1}(t) \cos^2(t) [n - \tan^2(t)].$



t	0	Arctan(sqrt(n))	$\frac{n}{2}$
$f_n'(t)$	+	0	-
$f_n(t)$	0	$\nearrow$	$\searrow 0$

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n(\text{Arctan}(\sqrt{n})) = n \frac{\tan^n(\text{Arctan}(\sqrt{n}))}{\cos^{n-1}(\text{Arctan}(\sqrt{n}))} = \frac{n(\sqrt{n})^n}{\left(\frac{1}{1+n}\right)^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}$$

Pas de conv unif.

Ex 89. a. Direct.

c'est pareil!

2. $f_n'(x) = n^a [n x^{n-1} - (n+1)x^n] = n^a x^{n-1} [n - (n+1)x].$

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f_n'(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow 0$

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^a \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\rightarrow e^{-1}} \times \frac{1}{n+1}$$

$$\sim e^{-1} n^{a-1}$$

Conv unif $(\Leftrightarrow) a < 1.$

Ex 90.

1. Si $n \geq 1$, $n^2 \geq n$ donc $0 \leq e^{-n^2 x} \leq e^{-n x}$.
Or $\sum e^{-n x}$ conv (série géom $|e^{-x}| < 1$).

2. $\|u_n\|_{\infty,]0, +\infty[} = 1$ pas de conv norm sur $]0, +\infty[$.

$$\|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = u_n(a)$$

conv norm sur $[a, +\infty[$ donc
cont sur $[a, +\infty[$.

3. Si $n \geq 4$
 $\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{1}{n^2}$. $\forall$ int terme à terme.

$$\int_0^{+\infty} (f - u_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

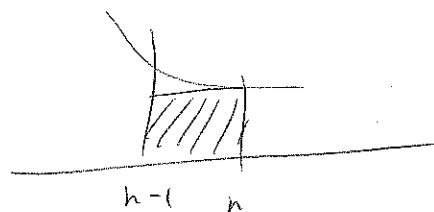
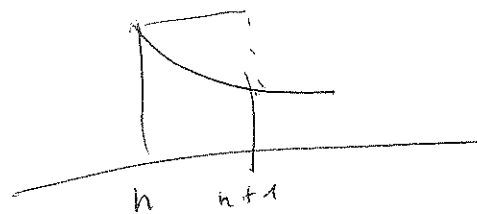
Mais u_0 n'est pas int
donc f non plus.

4. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-u^2}}_{\text{noté } C} du$ $f(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} + O(1)$.

5. x fixé $t \mapsto e^{-t^2 x}$ est décroissante.

$$\text{Si } n \geq 0, \quad \int_n^{n+1} e^{-t^2 x} dt \leq e^{-n^2 x}$$

$$\text{Si } n \geq 1, \quad \int_{n-1}^n e^{-t^2 x} dt \geq e^{-n^2 x}$$



E x 88.

2. $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n \geq 0}$ est décroissant de lim nulle. Conv simple.
Soit $x > 0$.

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad |R_N(x)| \leq \frac{1}{x+N+1} \leq \frac{1}{N+1}$$

indép de x

si $N \geq 1$ $\|R_N\|_{\infty, [0, +\infty[} \leq \frac{1}{N+1}$ $\sum_{n \geq 1} u_n$ conv unif sur $[0, +\infty[$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est cont et f aussi.

3. $f(x) = u_0(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1}(x)$.

4. $f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)(x+k+1)}}_{\text{noté } g(x)}$

5. Th séries alt : $|g(x)| \leq \frac{1}{x(x+1)}$

donc $f(x) = \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Conv unif sur $[0, +\infty[$
en fait donc

6. $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$f(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln(2) + o(1)$

7. Pas d'intégration terme à terme directe.

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{x+n-1}}{\text{raison } \neq 1} dt = \int_0^1 t^{x-1} \times \frac{1-t}{1+t} dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t} dt$
 $|c_n| \leq \int_0^1 t^{x+N} dt = \frac{1}{x+N+1}$
donc tend vers 0.

Ex 86.

~~à~~ À connaître : polynômes interpolateurs de Lagrange.
 $a_0, \dots, a_d$ distincts fixés dans $\mathbb{R}$.

$$\varphi : \mathbb{R}_d[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$$

$$P \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_d))$$

est un isom.

$$(e_0, \dots, e_d) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^{d+1}.$$

$$L_i = \varphi^{-1}(e_i)$$

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

$$P = \varphi^{-1}(\varphi(P)) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=0}^d P(a_i) e_i\right) = \sum_{i=0}^d P(a_i) L_i.$$

a. $P_n(t) = \sum_{i=0}^d P_n(a_i) L_i(t) \longrightarrow \sum_{i=0}^d f(a_i) L_i(t)$

$P_n \xrightarrow{\text{simple}} f$ $f = \sum_{i=0}^d f(a_i) L_i \in \mathbb{R}_d[x].$

b. J segment.
 Soit $t \in J$. $|P_n(t) - f(t)| \leq \sum_{i=0}^d |P_n(a_i) - f(a_i)| \times |L_i(t)|$

$$\|P_n - f\|_{\infty, J} \leq \sum_{i=0}^d \underbrace{|P_n(a_i) - f(a_i)|}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\|L_i\|_{\infty, J}}_{\text{indép de } n}.$$

Conv unif sur J .