

Jeudi 7 juin 2018

Ex 48. Sei $x \in \text{Im}(u)$. Sei $y \in \text{Ker}(u)$.

$$\langle x, y \rangle = \langle u(z), y \rangle$$

$$\left| \begin{array}{l} \langle u(z+y), z+y \rangle = 0 \\ \quad \quad \quad \parallel \\ \underbrace{\langle u(z), z \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u(z), y \rangle}_{\text{but}} \end{array} \right.$$

$$+ \underbrace{\langle u(y), z \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u(y), y \rangle}_{=0}$$

done $\langle u(z), y \rangle = 0$ done $\langle a, y \rangle = 0$.

$\text{Im}(u) \perp \text{Ker}(u)$ + the range ~~domain~~ suppl.

Ex 49. 1. $A_3(\mathbb{R})^\perp = S_3(\mathbb{R})$.

$$\underline{2.} \quad M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in S_3(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in A_3(\mathbb{R})}$$

$$d(M, A_3(\mathbb{R})) = \left\| \frac{M + M^T}{2} \right\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

Ex 51. a. matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Ex 51. a. matrice de $M_n(\mathbb{K})$
b. $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(a, b)^\perp$. $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(a, b)$ + eg dim.

c. $(f(x)|y) = (a|x)(a|y) + (b|x)(b|y) = (x|f(y)).$

d. les valeurs non nulles de f sont celles de l'endo induit sur $\text{Im}(f)$.
(matrice de Gram).

d. les val. pr non nulles (matrice de Gram).

$$M_{(a,b)}(\varphi) = \begin{pmatrix} (a|a) & (b|a) \\ (a|b) & (b|b) \end{pmatrix} \quad \chi_{\varphi} = X^2 - [\|a\|^2 + \|b\|^2]X + \|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2$$

$$\Delta = (\|a\|^2 + \|b\|^2)^2 - 4\|a\|^2\|b\|^2 + 4(a|b)^2 = (\|a\|^2 - \|b\|^2)^2 + 4(a|b)^2. \text{ Toujours.}$$

On ne fera pas mieux.

Ex 52. a. Oui.

b. $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

$$(1, X-1) = 1! - 1! = 0.$$

$$\|1\|^2 = \int_0^{+\infty} 1 e^{-t} dt = 1, \quad \|X-1\|^2 = \int_0^{+\infty} (t^2 - 2t + 1) e^{-t} dt$$

$$= 2 - 2 + 1 = 1.$$

c. $\min_{\mathbb{R}^2} F = \|X^2 - p_1(X^2)\|^2$

$$p_1(X^2) = (X^2|1) \cdot 1 + (X^2|X-1)(X-1)$$

$$= 2 + (6-2)(X-1) = 2 + 4(X-1)$$

$$= 4X - 2.$$

$$\min_{\mathbb{R}^2} F = \|X^2 - 4X + 2\|^2 = (X^2 - 4X + 2 | X^2)$$

$$= 4! - 4 \times 3! + 2 \times 2!$$

$$= 4.$$

Ex 53. a. Ben oui.

b.
$$\left. \begin{aligned} t_{V_i} M W_j &= \lambda_j t_{V_i} W_j \\ " & \\ t(t_M V_i) W_j &= \lambda_i t_{V_i} W_j \end{aligned} \right\} \lambda_i \neq \lambda_j \text{ donc } t_{V_i} W_j = 0.$$

c. Si $t_{V_i} W_i = 0$, alors $V_i \in \text{Vect}(W_1, \dots, W_n)^\perp$ donc $V_i = 0$. Faux.
En fait, V_i dirige $\text{Vect}(W_k; k \neq i)^\perp$.

d.
$$B_k V_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ V_k & \text{si } i = k \end{cases}$$

$B_k = \text{proj sur Vect}(V_i) \text{ parallèle à Vect}(V_j; j \neq i) = \text{Vect}(W_i).$

e.
$$\sum_{k=1}^n B_k = I_n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_k B_k V_i = \lambda_i V_i \quad \text{donc } \sum_{k=1}^n \lambda_k B_k = M. \quad \text{et} \quad = M V_i$$

Ex 50. $\Rightarrow$ est évident.

Réciproque.

Hyp. $(x|y) = 0 \Rightarrow (s(x)|s(y)) = 0$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

$(s(e_1), \dots, s(e_n))$ est alors une base orthogonale.

Si $i \neq j$
 $(e_i - e_j | e_i + e_j) = 0$ donc $(s(e_i) - s(e_j) | s(e_i) + s(e_j)) = 0$

donc $\|s(e_i)\| = \|s(e_j)\|$.

Notons $\lambda = \|s(e_1)\|$.

$\left(\frac{s(e_1)}{\lambda}, \dots, \frac{s(e_n)}{\lambda} \right)$ est une base orthonormale

si $\lambda \neq 0$

(si $\lambda = 0$,
 $s = 0$).

donc $\frac{s}{\lambda} \in \mathcal{O}(E)$.

$\forall (x, y) \in E^2, \left(\frac{s}{\lambda}(x) | \frac{s}{\lambda}(y) \right) = (x|y)$

$(s(x) | s(y)) = \lambda^2 (x|y)$.