

Jeudi 7 juin 2018

Ex 128. $\frac{1}{x} y' = \frac{1+\lambda}{x} y$

$$x \mapsto \alpha |x|^{1+\lambda}$$

2. $\varphi(X^n) = (n-1)X^n$

what else?

Ex 131. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Rouais. Analyse.

Soit z une sol.

$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) = x'(t) + y'(t) + 2z'(t) = 2z'(t) + 3z(t).$$

Eq caract : $r^2 - 2r - 3 = 0$. sol: -1 et 3 .

Il existe α et β réels tq $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{3t}$.

~~Il existe~~ γ et δ réels tq $\forall t \in \mathbb{R},$
 $x(t) = -\alpha e^{-t} + \frac{\beta}{3} e^{3t} + \gamma$
 $y(t) = -2\alpha e^{-t} + 2\frac{\beta}{3} e^{3t} + \delta$

De plus: $\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = -\alpha e^{-t} + 3\beta e^{3t}$
 $x(t) + y(t) + \frac{2}{3}z(t) = -\alpha e^{-t} + 3\beta e^{3t} + \gamma + \delta$

donc $\gamma = -\delta$.

Finalement, il existe α, β, γ réels tq $\forall t \in \mathbb{R},$
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{3} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Synthèse. Inclusion de l'esp des sol dans un esp de dim 3
th de Cauchy $\longrightarrow$ Egalité des dim donc égalité

bornée sur $[0, +\infty[\Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow M(0) \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

bornée sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow M(0) \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Ex 129.

1. $|f(y)| \leq \|y\|_{\infty} \times |f|$ donc $f y$ est int donc y'' aussi.

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x y''(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \underbrace{y'(0) + \int_0^{+\infty} y''}_{\text{noté } l}$$

Si $l > 0$, alors il existe $a \geq 0$ tq $\forall x \geq a, y'(x) \geq \frac{a}{2}$

puis $\forall x \geq a, y(x) \geq \frac{a}{2}(x-a) + y(a)$ donc

$y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ mais c'est faux (y est bornée).

Idem si $l < 0$ donc $l = 0$.

2. $W' = 0$. Si y_1 et y_2 sont bornées, alors $y_1 y_2' - y_1' y_2 \xrightarrow{+ \infty} 0$
donc $W = 0$ donc (y_1, y_2) est liée.

Ex 127. 1. ~~$f(t) = t$~~ Hum - ça sent le Python!

2. $f(t) = t$. Fleumme.