

Vendredi 8 juin 2018

Ex 138.

a. Notons $\Delta =]-1,1[\times \mathbb{R}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ .

$$\forall (x,y) \in \Delta, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{1-x^2} \sin(y).$$

$$b. \quad \nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x \left[2 - \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-x^2}} \right] = 0 \\ \sin(y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ou} & 2 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, y = k\pi \end{cases}$$

E_k

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \hline \varphi(x) & 1 & \nearrow & \searrow 1 \end{array}$$

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

si k est impair, E_k n'a pas de sol :

$$\text{si } k \text{ est pair, } E_k \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pts critiques: $(0, k\pi)$, $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 2k\pi\right)$.

$$c. \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) = \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \text{ et } f(x,y) \leq x^2 + \sqrt{1-x^2}.$$

$$d. \quad f(0,y) = -\cos(y) \quad f(0,y) - 1 \leq 0.$$

$$e. \quad f(x, \pi) = -x^2 + \sqrt{1-x^2} = -1 + x^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

f. Point-selle: min selon x seul x varie, max si seul y varie.

$$g. \quad f(0,0) = -1. \quad x^2 \geq 0. \quad -\cos(y)\sqrt{1-x^2} \geq -1.$$

Ex 139.

a. The spectral: $P \in O_n(\mathbb{R})$,

$$P^T A P = D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$d_1 \geq \dots \geq d_n$

posons $Y = P^T X$
 $C = P^T B$

$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{1}{2} X^T P D P^T X - B^T X \\ &= \frac{1}{2} Y^T D Y - \cancel{B^T P} C^T Y \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (d_k y_k^2 - 2c_k y_k) \end{aligned}$$

note $g(y)$

s'il existe k tq $d_k < 0$, le choix $y = \sqrt{\frac{2}{|d_k|}} t E_k$ donne $g(y_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$
 s'il existe k tq $d_k = 0$ et $c_k \neq 0$, $g(y_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \pm \infty$ si $c_k < 0$
 $g(y_t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \pm \infty$ si $c_k > 0$

Dernier cas: les d_k sont ≥ 0 et $d_k = 0 \Rightarrow c_k = 0$.

Il reste $g(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (d_k y_k^2 - 2c_k y_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p d_k \left[y_k - \frac{c_k}{d_k} \right]^2 + \left(\frac{c_k}{d_k} \right)^2$

g admet pour min $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{c_k^2}{d_k}$

b. $f(X+H) = \frac{1}{2} (X^T + H^T) A (X+H) - B^T (X+H)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} X^T A X - B^T X}_{= f(X)} + \underbrace{\frac{1}{2} (H^T A X + X^T A H) - B^T H}_{\text{linéaire en H}} + \underbrace{\frac{1}{2} H^T A H}_{O(\|H\|^2)}$$

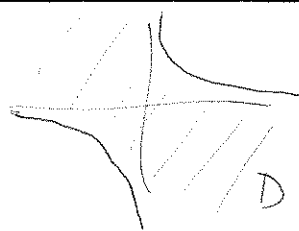
donc $df(X) \cdot H = \frac{1}{2} (H^T A X + X^T A H) - B^T H = X^T A H - B^T H$

donc $\nabla f(X) = \cancel{X^T A} \cancel{X} A X - B$. (le calcul des dérivées partielles donne ça aussi)

c. Avoir

Ex 136.

a.



$$\Delta = (\text{axe}(Ox)) \cup (\text{axe}(Oy)).$$

$(x, y) \mapsto xy$ est cont donc D est ouvert

et Δ est fermé.

b. $f(x, y) = u(xy)$ avec $u(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

$\forall t \in]-1, 1[, u(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$

de plus, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 0[$ donc u — sur $] -\infty, 1[$

et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D .

Ex 137.

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y - 15, 3x - 12).$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -11 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

Pas d'extr global.

$$\begin{aligned} f(4+a, -11+b) &= (4+a)^3 + 3(4+a)(-11+b) - 15(4+a) - 12(-11+b) \\ &= 64 + 48a + 12a^2 + a^3 + (-132 - 33a + 12b + 3ab) - 60 - 15a + 132 - 12b \\ &= 4 + 12a^2 + 3ab + a^3 = 4 + a[12a + 3b + a^2]. \end{aligned}$$

$$f(4+a, -11) = 4 + a^2(12+a) \geq f(4, -11) \quad \text{si } a \text{ est assez petit}$$

$$f(4+a, -11+5a) = 4 + a^2(-3+a) \leq f(4, -11) \quad \text{Pas d'extr local.}$$

Ex 140. a. ~~$f(x, y) = \ln(x) \ln(y)$~~ $\nabla f(x, y) = (\ln(y) - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln(x)).$

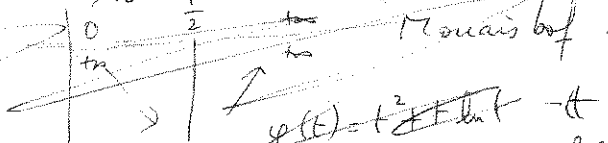
Si f a un extr en (x, y) , alors $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ donc $\ln(y) = \frac{y}{x}$, $\ln(x) = \frac{x}{y}$
donc $\ln(x) \ln(y) = 1$, $y = \exp(\frac{1}{\ln(x)})$, $x = \ln(x) \exp(\frac{1}{\ln(x)})$.

Notons $t = \ln(x)$. Alors $e^t = t e^{\frac{1}{t}}$.

Sol « évident » 1 ~~$e = \frac{1}{e}$~~

$$\varphi(t) = e^t = t e^{\frac{1}{t}} \quad \varphi'(t) = e^t - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}}$$

$$\varphi'(t) = e^t \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] = \frac{e^t}{t^2} [2t - 1]$$



$$t = \ln(t) + \frac{1}{t} \quad t^2 + t \ln(t) = 1.$$

Bref. $\nabla f(x, y) \Leftrightarrow x = e, y = e.$

$$f(y, x) = -f(x, y) \leftarrow \text{impossible d'avoir un extr local.}$$

Ex 141. $(u, v) = (x, y e^{x^2/2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u e^{-u^2/2} \end{cases} \text{ bij.}$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u, v) \mapsto f(u, u e^{-u^2/2})$

g est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x, y e^{x^2/2})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, y e^{x^2/2}) + x y e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2})$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x y e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2}) - x y e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2}) = 0$

~~$f \text{ sd} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x y e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2}) = 0$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2}) = 0 \leftarrow \text{à expliquer}$~~

~~$\Leftrightarrow \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$~~

~~$\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = C(u)$~~

~~$\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = C(x)$~~

$f \text{ sd} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = C(v)$

$\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = C(y e^{x^2/2})$