

Mathématiques avec Python — planches de préparation à l'oral

Exercice 1. On définit la *suite de Fibonacci* par ses deux premiers termes $(F_0, F_1) = (0, 1)$ et la relation de récurrence

0879-18

$$\forall n \geq 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

a. Écrire une fonction d'en-tête `liste_fibo(n)` qui renvoie la liste $[F_0, \dots, F_n]$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la matrice A_n de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A_n = (F_{i+j})_{0 \leq i, j < n}.$$

b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_n pour $n = 5$ et pour $n = 7$.

c. Déterminer le rang de la matrice A_n .

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note X_y le vecteur $(y, 0, \dots, 0)$ écrit en colonne.

d. Trouver deux valeurs a et b telles que ${}^tX_a A_n X_a < 0$ et ${}^tX_b A_n X_b > 0$. **(Impossible. Rectifier cette question.)**

e. Montrer que A_n possède exactement deux valeurs propres non nulles et que l'une d'elles (notée α_n) est strictement négative, l'autre (notée β_n) étant strictement positive.

f. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n + \beta_n)_{n \geq 0}$, ainsi que celle de la suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2. On fixe un entier N strictement positif et on se donne une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$. On pose $S_n = U_1 + \dots + U_n$.

1035-18

a. Calculer l'espérance de U_1 , notée m , ainsi que la fonction génératrice de U_1 , notée G_{U_1} .

b. En déduire une expression de G_{S_n} .

c. On donne le programme Python suivant.

```
P = [0] + [1]*4
P = Polynomial(P)**6
print(sum(list(P)[0:10]))
```

La deuxième instruction crée le polynôme $(X + X^2 + X^3 + X^4)^6$ et la troisième fait la somme des 10 premiers coefficients de ce polynôme. Tester ce programme.

d. On pose $u_n = \mathbb{P}(S_n \leq nm)$. Écrire un programme Python qui calcule u_n pour tout $n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ et représenter les points (n, u_n) correspondants (on prendra $N = 11$ pour l'application numérique).

Conjecture ?

e. On pose $v_n = \mathbb{P}(S_n > nm)$ et $w_n = \mathbb{P}(S_n = nm)$. En considérant la suite de variables aléatoires $(N+1 - U_n)_{n \geq 1}$, montrer l'égalité $u_n = v_n + w_n$.

f. Écrire un programme Python qui représente les points (n, w_n) . Conjecture ?

g. En admettant la conjecture de la question précédente, démontrer celle de la question d.

h. On pose

$$S_{n,k} = \text{Card} \{ (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{N}^*)^n ; i_1 + \dots + i_n = k \}.$$

Montrer par une approche combinatoire l'égalité $S_{n,k} = \binom{k-1}{n-1}$.

i. Exprimer la loi de S_n à l'aide des nombres $S_{n,k}$.

Exercice 3. Soit un entier $n \geq 2$. On fixe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

0888-18

On cherche à résoudre numériquement le système linéaire $AX = B$ par la *méthode de Jacobi*. On fait l'hypothèse — nécessaire (et suffisante) pour la réussite du procédé — que les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - E - F$, où la matrice D est diagonale, la matrice E est triangulaire supérieure stricte et la matrice F est triangulaire inférieure stricte.

On se donne un vecteur X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit une suite vectorielle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$X_{k+1} = D^{-1}(E + F)X_k + D^{-1}B.$$

a. Écrire une fonction d'en-tête `decomp(A)` qui renvoie le triplet (D^{-1}, E, F) .

b. Écrire une fonction d'en-tête `jacobi(A, B, X0, n)` qui renvoie le vecteur X_n .

c. Tester la fonction `jacobi` avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en prenant $X_0 = B$.

Comparer le résultat obtenu avec celui fourni par `numpy.linalg.solve(A, B)`.

c. Dans la suite, on suppose que la matrice A est à *diagonale strictement dominante selon les lignes*, ce qui signifie

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |A(i, i)| > \sum_{j \neq i} |A(i, j)|.$$

i. Montrer que la méthode de Jacobi peut être mise en œuvre.

ii. Montrer que la matrice A est inversible.

iii. On note Y l'unique solution du système $AX = B$ et on pose $M = D^{-1}(E + F)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$X_{k+1} - Y = M(X_k - Y).$$

iv. En déduire l'existence de $\rho \in [0, 1[$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|X_{k+1} - Y\| \leq \rho \|X_k - Y\|,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme infinie.

v. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$. On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes valent 0 ou 1.

0896-18

a. Montrer que la série de terme général $u_n \varepsilon_n$ est convergente et que sa somme est comprise entre 0 et $\pi/2$.

b. Dans cette question, on fixe x dans $[0, \pi/2]$ et on définit la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit. Si $x < \pi/4$, on pose $\varepsilon_0 = 0$. Sinon, on pose $\varepsilon_0 = 1$.

Étant donné un entier n pour lequel on a déjà défini $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$, on pose

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k u_k + u_n < x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i. Programmer une fonction d'en-tête `suite(x, n)` qui prend le couple (x, n) en argument et renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k$.

ii. En testant pour $n = 100$ et des valeurs de x , émettre une conjecture.

iii. Prouver cette conjecture.

c. Cette propriété reste-t-elle vraie si on prend $u_n = 2/3^{n+1}$ et $x = 1/2$?

Exercice 5. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0, 1]$ et on suppose qu'elle vérifie les relations

A032-17

$$f(0) = 1, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = f(x^2).$$

1. Écrire une fonction `indice(x, h=0.01)` qui prend en entrée un élément x de $[0, 1]$ et renvoie l'entier i tel que $t_i \leq x < t_{i+1}$, où l'on note $t_i = i \times h$.

2. Avec la méthode d'Euler, créer la liste des nombres $f(t_i)$ pour i variant de 0 à n , avec $n = \text{indice}(1)$.

3. Avec Python, représenter graphiquement la fonction f sur $[0, 1]$.

4. On fait l'hypothèse que f est développable en série entière sur $[0, 1]$ et on introduit son développement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

a. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver la relation $a_{2p+1} = a_p/(2p+1)$. Obtenir également l'égalité $a_{2p} = 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

b. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, prouver la relation $a_{2p-1} = a_0 \prod_{i=1}^p \frac{1}{2^i - 1}$.

c. On rappelle que tout entier n possède une décomposition de la forme $n = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i 2^i$, où les ε_i valent 0 ou 1.

Montrer que si l'un des ε_i est nul, alors a_n est nul.

5. Synthèse : construire une fonction f solution sur $[0, 1]$ du problème $y'(x) = y(x^2)$.

Exercice 6. On se donne $a \in \mathbb{R}$ et $\omega \in]0, +\infty[$.

1062-17

a. Déterminer la solution de l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$ telle que $x(0) = 0$ et $x'(0) = a$.

b. On considère une fonction f définie sur un intervalle I contenant 0 et on suppose qu'elle vérifie les conditions

$$f'' + \omega^2 \sin(f) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = a.$$

Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, 10]$ pour tout a dans l'ensemble $[0.5, 1, 1.5, 2, 2.5]$.

c. On fixe r dans $]0, 1[$ et on définit la fonction $F : t \mapsto \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\omega u)}}$.

i. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et impaire.

ii. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de même que sa réciproque F^{-1} .

iii. Dans le cas $r = 0.9$, tracer le graphe de F sur $[-5, 5]$.

d. Tracer le graphe de la fonction $\varphi : t \mapsto 2 \operatorname{Arcsin}(r \sin(\omega F^{-1}(t)))$ sur $[-5, 5]$.

e. On fait l'hypothèse $0 < a < 2\omega$ et on choisit $r = a/(2\omega)$. Montrer que ϕ est une solution du problème de la question b.

Exercice 7. (MP uniquement) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$. Son polynôme

caractéristique est noté χ_n .

- Écrire une fonction en Python qui renvoie la matrice A_n .
- Trouver une relation entre χ_n et χ_{n-1} .
- On considère la fraction rationnelle $F_n = \frac{\chi_n}{(X-2) \cdots (X-n)}$. Décomposer F_n en éléments simples. En déduire une expression factorisée de χ_n .
- Justifier que le spectre de A_n est inclus dans $\mathbb{R}$.
- Écrire une fonction en Python qui renvoie la plus grande valeur propre de A_n , notée λ_n .
- Trouver un équivalent de λ_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers définie par

$$u_0 = 9, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4(u_n)^3 + 3(u_n)^4.$$

On note c_n le nombre de chiffres 9 terminant l'écriture décimale de u_n .

- Écrire une fonction `nombre9(n)` qui renvoie le nombre de 9 terminant l'écriture décimale d'un entier n donné.
- Calculer c_n pour tout n dans $\llbracket 0, 10 \rrbracket$.
- Conjecturer une expression de c_n puis démontrer la conjecture.
- Écrire une fonction `avant9(n)` qui renvoie le chiffre situé à gauche du blocs de chiffres 9 terminant l'écriture décimale de l'entier n ; cette fonction renvoie 0 si l'entier n ne s'écrit qu'avec des 9.
- Appliquer cette fonction à u_n pour tout n dans $\llbracket 0, 10 \rrbracket$. Émettre une conjecture puis la démontrer.
- On note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de u_n . Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'encadrement

$$4p_n - 2 \leq p_{n+1} \leq 4p_n + 1$$

puis en déduire un encadrement de la forme $\alpha 4^n \leq p_n \leq \beta 4^n$ valable pour tout entier n .

Exercice 9. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose

$$\Phi(P, Q) = \int_{-2}^2 P(t)Q(t) dt.$$

- Montrer que Φ est un produit scalaire et écrire une fonction qui calcule $\Phi(P, Q)$.
- Montrer que les sous-espace des polynômes pairs et impairs sont supplémentaires orthogonaux dans E .
- Déterminer une base orthonormale de E .
- Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = 2XP' + (X^2 - 4)P''$.

Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E . Déterminer la matrice de f dans la base canonique et en déduire les valeurs propres de f . Déterminer une base de vecteurs propres de f .

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_2(n)$ la somme des chiffres de l'écriture binaire de n et on pose $s_n = (-1)^{\sigma_2(n)}$.

0963-17

a. Écrire une fonction `binaire(n)` qui renvoie l'écriture binaire de n sous forme d'une liste, où le coefficient d'indice i de la liste est le chiffre en facteur de 2^i dans le développement binaire de n . Par exemple, les appels `binaire(8)` et `binaire(237)` doivent renvoyer les listes $[0, 0, 0, 1]$ et $[1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1]$ respectivement.

b. Exprimer $\sigma_2(2n)$ et $\sigma_2(2n+1)$ en fonction de $\sigma_2(n)$. En déduire des expressions de s_{2n} et s_{2n+1} en fonction de s_n .

c. Écrire une fonction `liste_s(n)` qui renvoie la liste $[s_0, \dots, s_n]$.

d. On pose $S_n = s_0 + \dots + s_n$. Émettre une conjecture sur S_n puis démontrer cette conjecture.

e. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite de terme général $V_n = v_0 + \dots + v_n$ soit bornée. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

Montrer que la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ converge.

f. Montrer que $\prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{n+1} \right)^{s_n}$ possède une limite finie et non nulle quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 11. On définit sur $[0, 1]$ la fonction $f : x \mapsto x(1-x) \cos(5\pi x)$.

1040-17

a. Tracer le graphe de f et évaluer le maximum de cette fonction sur $[0, 1]$, noté M .

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)^n dt$. Calculer quelques valeurs de cette intégrale.

c. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n I_k x^k$ et $a = 1 + 1/M$. Représenter la fonction S_n sur $[-a, a]$ pour quelques valeurs de n .

d. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum I_k x^k$.

Exercice 12. On note L l'arc plan paramétré par

1082-17

$$x(t) = \sqrt{\cos^2(t) + 4 \cos(t) + 3}, \quad y(t) = \sin(t).$$

a. Préciser le domaine de définition et faire le tracé de la courbe.

b. Justifier les symétries mises en évidence par le tracé. En déduire un domaine d'étude.

c. Étudier les variations de x et y sur le domaine d'étude. Expliquer le comportement observé aux éventuels points singuliers.

d. Donner une équation des tangentes en l'origine.

e. Calculer une valeur approchée de la longueur de L .

Exercice 13. On définit une suite $(P_{i,j})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ en posant $P_{i,1} = 1$ et $P_{1,j} = 1$ puis

1085-17

$$P_{i,j} = P_{i-1,j} + P_{i,j-1} + X P_{i-1,j-1} \quad \text{si } i \geq 2 \text{ et } j \geq 2.$$

a. Écrire une fonction `poly(i, j)` qui renvoie le polynôme $P_{i,j}$.

b. Calculer $P_{k,7}$ pour tout $k \in [1, 4]$.

c. Émettre une conjecture quant au degré de $P_{i,j}$ puis démontrer cette conjecture.

Exercice 14. On fixe un entier $p \geq 3$.

Pour tout (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$, on appelle *matrice bande* $[a, b, c]$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivante

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

On note en particulier A la matrice bande $[-1, 3, -1]$.

Dans cette planche, on identifie $\mathbb{R}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que la matrice A est inversible.

Soit $B \in \mathbb{R}^p$. On note X^* l'unique solution du système linéaire $AX = B$. Ce système se réécrit $X = CX + B/3$ en posant $C = I_p - A/3$.

b. On note T l'application $X \mapsto CX + B/3$, définie de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^p$. Quelle est la valeur de $T(X^*)$?

c. Écrire une fonction `matBande(p, b, a)` qui renvoie la matrice bande $[b, a, b]$ puis une fonction `T(p, X)` qui renvoie la colonne $T(X)$.

d. Dans le cas $B = (1, \dots, 1)$ et $p = 5$, effectuer l'application numérique : calculer A^{-1} et obtenir une valeur approchée de X^* .

e. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie. Montrer que T est k -lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$ à préciser.

f. On définit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^p$ en prenant X_0 quelconque puis en posant $X_{n+1} = T(X_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la majoration $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq k^n \|X_1 - X_0\|_\infty$ puis en déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer plus précisément que la limite de cette suite de vecteurs est le vecteur X^* .

On rappelle que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est définie sur $\mathbb{R}^p$ par $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_p|)$.

g. Tester ce phénomène de convergence sur l'exemple de la question d.

Programme des présentations au tableau

MP, jeudi 14 juin 2018

Planches 2, 6 et 7.

MP, jeudi 21 juin 2018

Planches 14, 10 et 11.

PC-PC*-PSI, samedi 16 juin 2018

Planches 2, 6 et 3.

PC-PC*-PSI, lundi 18 juin 2018

Planches 14, 5 et 11.

Les planches auront été préparées avant les séances. Présentation au tableau en une vingtaine de minutes puis débriefing et compléments.