

Mardi 12 juin 2018.

Ex 58. a. Direct en admettant que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme.

b. Soit $x \in [0, 1]$. $|f(x) - f(0)| \leq \|f'\|_\infty \cdot |x| \leq \|f'\|_\infty$

donc $|f(x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N(f)$. ^{acc}
^{fin}
indép de x donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

c. $f_n(x) = x^n$. $N(f_n) = n$. $\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = n \leftarrow$ pas de majorant universel.
 $\|f_n\|_\infty = 1$

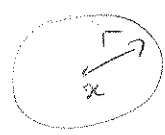
Ex 59. a. $A \cap B \subset \cancel{\text{Adh}} A \cap \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$
^{fermé}

donc $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$.

Montrons maintenant l'inclusion $A \cap \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cap B)$.

Soit $x \in A \cap \text{Adh}(B)$.

$x \in A$ et il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
suite d'él de B tq $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

 A est ouvert donc il existe $r > 0$ tq $B(x, r) \subset A$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, a_n \in B(x, r)$ donc $a_n \in A \cap \text{Adh}(B)$.

Ainsi $x \in \text{Adh}(A \cap B)$.

$\text{Adh}(A \cap B) = \emptyset$
 $\text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B)) = \mathbb{R}$.

b. $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
dans $\mathbb{R}$.

Ex 61. $\leftarrow$ immédiat.

$\rightarrow$ Hyp: $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Il faut d'abord l'existence de $C > 0$ tq $\forall y \in \text{Im}(f), \|y\| \leq C \|f(y)\|$.

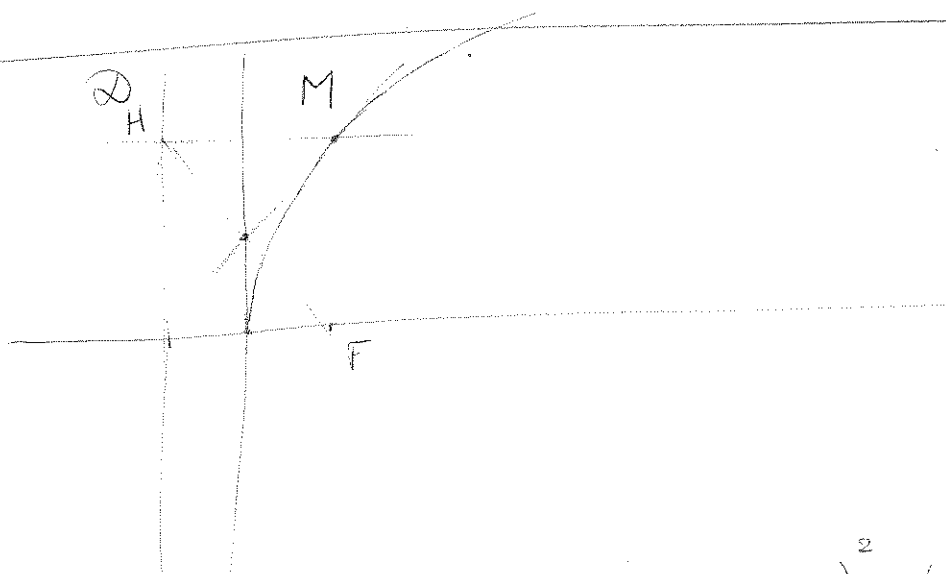
Notons $\varphi: \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$
 $y \mapsto f(y)$

Soit $y \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $f(y) = 0$
 et y est de la forme $f(z)$ donc
 $f^2(z) = 0$ donc $f(z) = 0$ donc $y = 0$.

φ est unisom.

φ^{-1} est lipsch: il existe $C > 0$ tq $\forall z \in \text{Im}(f), \|\varphi^{-1}(z)\| \leq C \|z\|$
 Et vrb.

Ex 167.



a. Soit $M(x, y)$ un point. $\|MF\|^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2$ $d(M, D)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$
 $MF^2 = d(M, D)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px \Leftrightarrow M \in P$.

b. $H(-\frac{p}{2}, y) = (\frac{p}{2}, 0)$ milieu de $[HF]$ $\vec{HF} = (p, -y)$.

$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x, y) = 0\}$, avec $\varphi(x, y) = y^2 - 2px$. $\nabla \varphi(M) = \begin{pmatrix} -2p \\ 2y \end{pmatrix} = -2\vec{HF}$.

donc la tangente en P à M est $\perp$ à (HF) or M est équidistant de H et F
 donc la tangente est la médiatrice de $[HF]$.

Ex 166. $\varphi(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}$. $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{2t \text{Arctan}(t)}{(1+t^2)^2}$. $\vec{\nabla} f(x, y, z) = \varphi'(x, y, z) (y, z, x)$.

$\vec{\nabla} f(1, 1, 1) = \varphi'(1) (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \times \frac{\pi}{4}}{4}\right) (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) (1, 1, 1)$.

Plan tangent: $(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$, i.e. $x+y+z = 3$.