

Mercrèdi 13 juin 2018.

Ex 12. Dém dans le cas  $\begin{cases} p=n \\ q=n \end{cases}$

Le cas général s'y ramène par le th de la base incomplète.

Montrons qu'il existe  $W_1, \dots, W_n$  tq  $X_j^T W_k = \delta_{j,k}$ .

Notons  $X = (X_1 | \dots | X_n)$ . ~~X est inversible~~

Ça revient à avoir  $X^T W = I_n$ , c'est-à-dire  $(W_1 | \dots | W_n) = X^{-T}$ .

De même, on a  $V_1, \dots, V_n$  tq  $V_l^T X_i = \delta_{i,l}$ .

Allons-y :  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} X_i X_j^T = 0$

On multiplie à gauche par  $V_l^T$  et à droite par  $W_k$  : il reste  $\lambda_{l,k} = 0$ .

Ex 15. 1. Soit  $P \in \ker(A)$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X+n) = P(X)$ .

$P - P(0)$  a une inf de rac donc  $P = P(0)$ .  $\ker(A) = \mathbb{R}_0[X]$  (c'est ex 16 Q2).

2. Il n'y a pas unicité!

Ex 16. 1.  $f(1)=0, f(X)=1, f(X^2)=2X+1, f(X^3)=3X^2+3X+1$ .

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . 2.  $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$ .

3.  $\ker(f_n) = \mathbb{R}_0[X]$ .  $\text{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$  + égalité dim.

4.  $\text{Im}(f)$  contient  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  pour tout  $n \geq 1$  donc  $\mathbb{R}[X]$ .

5.  $X^2 = \frac{1}{3} (3X^2 + 3X + 1) - \frac{1}{2} (2X + 1) + \frac{1}{6}$

$x^2 + x + \frac{1}{3} - x - \frac{1}{2}$

donc  $X^2 = f\left(\underbrace{\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6}}_Q\right)$  les autres antécédents sont les  $\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} + \lambda$ .

6.  $\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=0}^n (Q(k+1) - Q(k)) = Q(n+1)$ .

Ex 17. 1.  $\lambda u + \mu v$  inv.  $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(\lambda u + \mu v) = \{0\}$

2.  $u: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$   $v: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$   
 $p \mapsto p'$   $p \mapsto p(0)$

$\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0\}$ . Mais tout endo de la forme  $\lambda u + \mu v$   
a un noyau non trivial: si  $\lambda, \mu$  sont non nuls, il envoie  $p$  sur  $\lambda p' + \mu p(0)$   
et le polynôme  $\mu X - \lambda$  convient.

3. ? dim finie? Oui matriciellement.  
 $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v) \oplus H$ .

$M(u + \lambda v) = \begin{pmatrix} U & 0 & * \\ 0 & \lambda V & * \\ 0 & 0 & W_1 + \lambda W_2 \end{pmatrix}$   $\det(W_1 + \lambda W_2)$   
est un polynôme  
en  $\lambda$  de degré  
 $\dim(H)$  donc  
on peut choisir  $\lambda$  qui le  
rend non nul.

Oups.  
ce n'est pas celui-là.

Ex 25. a.  $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B-A \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$

$\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B-A)$ . inv  $(\Leftrightarrow) A$  et  $B-A$  inv.

b. en cas d'existence,

$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (B-A)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

Ex 31.  $J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$   $M = I + 2J + 3J^2 + \dots + nJ^{n-1}$   
 $J^n = I$ .

~~$(I-J)M = I + 2J + 3J^2 + \dots + nJ^{n-1} - (nI + J + 2J^2 + \dots + (n-1)J^{n-1}) = (1-n)I + J + \dots + J^{n-1}$~~

~~$(I-J)^2 M =$~~   $J \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On diagonalise (matrice compagne).

$(\Rightarrow) \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} (\Rightarrow) \begin{cases} x_1 = \lambda^{n-1} x_n \\ x_2 = \lambda^{n-2} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \\ x_n = \lambda^n x_n \end{cases}$

si  $\lambda^n \neq 1$ ,  
pas val' pr.

si  $\lambda^n = 1$ , val pr et  $E_\lambda(J) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right)$   
 $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \omega^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$   $\omega = e^{i2\pi/n}$

$\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k + 3\omega^{2k} + \dots + n\omega^{k(n-1)})$

Preons  $Q = X^n + \dots + X$ , de sorte que  $(X-1)Q = (X^{n+1} - X)$   
 $Q(1) = n$   $(X-1)Q' + Q = (n+1)X - 1$

$Q(\omega^k) = 0$  si  $\omega^k \neq 1$ .

$(\omega^k - 1)Q'(\omega^k) = (n+1)\omega^k - 1$

$Q'(\omega^k) = \frac{(n+1)\omega^k - 1}{\omega^k - 1}$  Berk.

Ex 34. On diagonalise  $A$  (th spectral/).

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A^k = I_n$  donc  $\lambda_i^k = 1$

donc  $\lambda_i = \pm 1$  donc  $A^2 = I_n$ . Nul...

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

Ex 17. Soit Hyp:  $\begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E \end{cases}$  Alors  $\dim(F) = \dim(G)$ .

Réciproque. Hyp:  $\dim(F) = \dim(G)$ .

Soit  $(a_1, \dots, a_r)$  une base de  $F \cap G$ .

On la complète en une base  $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$  de  $F$   
et  $(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_s)$  de  $G$ .

Notons  $F_1 = \text{Vect}(b_1, \dots, b_s)$  et  $G_1 = \text{Vect}(c_1, \dots, c_s)$ .

Fait.  $F + G = F \oplus G_1$  et  $F + G = F_1 \oplus G$ .

Dém. Déjà,  $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s)$  engendre  $F + G$ .

Donc  $F + G = F + G_1$  et  $F + G = F_1 + G$ .

De plus, prenons  $x \in F \cap G$ . Il suffit alors de prouver que cette famille est libre (méthode empruntée à la démonstration de Grassmann).

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s, \nu_1, \dots, \nu_s) \in \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j + \sum \nu_k c_k = 0_E$   
note  $z$

Alors  $z \in F \cap G$  mais  $(F \cap G) \cap G_1 = \{0\}$  donc  $z = 0$ , donc les  $\nu_k$  sont nuls.

Donc  $\sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j = 0$ .  $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$  est libre donc les  $\lambda_i, \mu_j$  sont nuls.

Voilà. Notons  $H = \text{Vect}(b_1 + c_1, \dots, b_s + c_s)$ .

Alors  $F + G = F \oplus H$  et  $F + G = H \oplus G$

(laissé en exercice).

En notant  $K$  un supplémentaire de  $F + G$  dans  $E$ ,

$H \oplus K$  est un supplémentaire de  $F$  et de  $G$  dans  $E$ .