

Jendredi 14 juin 2018

Ex 155.

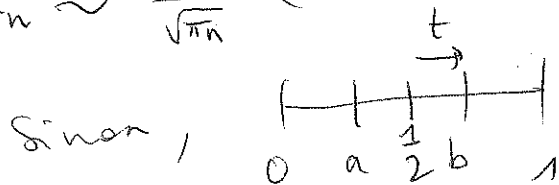
$$u_n \stackrel{\text{def}}{=} \binom{2n}{n} a^n b^n$$

$$u_n \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} a^n b^n$$

a.

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4ab)^n$$

si $a=b=\frac{1}{2}$, $4ab=1$ div.



en notant $t = b - \frac{1}{2}$, on a

$$ab = \left(t + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - t\right) = \frac{1}{4} - t^2$$

donc $0 \leq 4ab < 1$ conv.

b. $0 \leq p_n \leq 1$ et $0 \leq r_n \leq 1$ donc rayons ≥ 1 .

c. $r_0 = 1$. $R(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n t^n$ nul si $n=0$

Posons $p_0 = 0$. $R(t)P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n r_k p_{n-k} \right) t^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} r_k p_{n-k} \right) t^n$$

Il s'agit donc de justifier l'égalité $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} r_k p_{n-k}$

Notons X_k la position à l'instant k . $T =$ moment du 1^{er} retour.

On va admettre que T est une var al à val dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ (ce qui est ballot, car c'est censé être le but de l'exercice). (i.e. $P(T < \infty) = 1$).

$$T(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$$

$$P([X_n = 0]) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X_n = 0 | T = k)}_{=0 \text{ si } k > n} P(T=k) + \underbrace{P(X_n = 0 | T = \infty)}_{=0} P(T=\infty)$$

$$= \sum_{k=1}^n P(X_n = 0 | T = k) P_k$$

$$= P(X_n - X_k = 0 | T = k)$$

$$= \sum_{k=1}^n P_k r_{n-k}$$

$$= P(X_n - X_k = 0) = p_{n-k}$$

indép

$$= \sum_{k=0}^n p_k r_{n-k} \text{ en prenant } p_0 = 0.$$

Ex 155 (suite).

$$R(t)P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k r_{n-k} \right) t^k = 0 \times t^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n t^n$$

$$= R(t) - r_0 = R(t) - 1.$$

d. ~~$P(A) = P(1)$~~ ~~si $P(1) = 1$, alors $R(1)$ n'existe pas~~

~~$r_n = 0$ si n est impair.~~

$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si le nième mouvement est vers la gauche} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad Y_n \subset B(b)$

$$Y_1 + \dots + Y_n \subset B(n, b)$$

$$X_n = \sum_{k=1}^n (2Y_k - 1)$$

$$r_{2k} = P(X_{2k} = 0) = \sum_{k=1}^{2k} P(Y_1 + \dots + Y_{2k} = k) = \binom{2k}{k} b^k a^k$$

$P(A) = P(1)$. Si $P(1) = 1$, alors $R(1)$ n'existe pas

donc $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Si $P(1) < 1$, alors l'égalité $\forall t \in [0, 1[, R(t) = \frac{1}{1-P(t)}$

montre que R a une limite finie en 1 ~~et R est constante~~

sur $[0, 1[$. $\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1[, \sum_{n=0}^N r_n t^n \leq \frac{1}{1-P(t)}$

$t \rightarrow 1$ $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N r_n \leq 1$ donc la série $\sum r_n$ conv

donc $(a, b) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ex 158

1. $S \hookrightarrow G(p)$. $E(S) = \frac{1}{p}$. $E(X) = \frac{1}{p} \cdot 1 = \frac{1-p}{p}$

2. $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p q^k = \frac{p q^n}{1-q} = q^n$.

$[Z \geq n] = [X \geq n] \cap [Y \geq n]$ donc $P(Z \geq n) \stackrel{\text{indép}}{=} q^{2n}$.

3. $[Z \geq n] = [Z = n] \cup [Z \geq n+1]$

$P(Z = n) = q^{2n} - q^{2n+2} = q^{2n}(1 - q^2)$. $Z \hookrightarrow G(1 - q^2)$.

$E(Z) = \frac{q^2}{1 - q^2}$.

4. $T+1 \hookrightarrow G(p) \dots$ donc $T \hookrightarrow G_N(p)$.
WTF!

5.

6. $[D = i] \cap [Z = k] = [X = i+k, Y = k] \cup [Y = i+k, X = k]$

$P(D = i, Z = k) = \begin{cases} q^{2k} & \text{si } i = 0 \\ 2 q^{i+2k} & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$

Exercice pas très bien conçu.

Ex 160. $[Z \geq n] = [X \geq n] \cap [Y \geq n]$

$$P(Z \geq n) = (1-p_1)^{n-1} (1-p_2)^{n-1}$$

$$P(Z = n) = \left((1-p_1)(1-p_2) \right)^{n-1} \left(1 - (1-p_1)(1-p_2) \right)$$

Ex 161. $P(Y=i | X=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > n \\ \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & \text{si } i \leq n \end{cases}$

$$P(Y=i) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=i | X=n) P(X=n) = \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$\stackrel{k=n-i}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \times \frac{1}{k!} p^i (1-p)^k \lambda^{k+i} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{1}{i!} p^i \lambda^i e^{-\lambda} \times e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}}{i!} \quad / \quad Y \sim P(\lambda p)$$

Ex 162. $E\left(\frac{X}{Y}\right) \stackrel{\text{indép}}{=} E(X) E\left(\frac{1}{Y}\right) = E(X) E\left(\frac{1}{X}\right)$

$$(X-1)\left(\frac{1}{X}-1\right) = -\frac{(X-1)^2}{X^2} \leq 0 \text{ donc } E\left((X-1)\left(\frac{1}{X}-1\right)\right) \leq 0$$

ou $E\left((X-1)\left(\frac{1}{X}-1\right)\right) = E\left(1 - \frac{1}{X} - X + 1\right) = 2 - (E\left(\frac{1}{X} + X\right))$

Oups, c'est le 163...

À prouver: $E\left(\frac{1}{\sqrt{X}} \times \sqrt{X}\right)^2 \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 E\left(\sqrt{X}\right)^2$

ça ressemble à du Cauchy-Schwarz.

Si $A \geq 0$ et $B \geq 0$, à t-on $E(AB)^2 \leq E(A)^2 E(B)^2$.

Oui car $(U, V) \mapsto E(UV)$ est une forme bilinéaire symétrique positive.