

Vendredi 15 juin 2018 /

Ex 122. 1. $x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$.

2. φ est prol par cont en 0 (et cont sur $]0, +\infty[$).

3. $h(x) = h(1) + \int_1^x \varphi(t) dt$ $x \mapsto \int_1^x \varphi$ est une primitive de φ

$\forall x > 0, h'(x) = \varphi(x)$. Posons $y: x \mapsto e^{\frac{1}{x}} h(x)$ sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, y'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[h'(x) - \frac{1}{x^2} h(x) \right]$$

pour une sol part. $x^2 y'(x) + y(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} h'(x) = x^2 \varphi(x)$ donc vlté

se réécrit $y'(x) = -\frac{1}{x^2} y(x)$ donc $x \mapsto k e^{-\frac{1}{x}}$.

4. $e^{\frac{1}{x}} h(x) = \int_0^x \frac{1}{t} e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{t}} dt = \int_0^x \frac{e^{\frac{t-x}{xt}}}{t} dt$ (art, il y avait une indication dans l'énoncé...)

$]0, x] \rightarrow [0, +\infty[$

$$t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{x}$$

str décr, e^u , bij

$$u = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}, \quad t = \frac{1}{u + \frac{1}{x}} = \frac{x}{1 + ux}$$

$$dt = -\frac{1}{(u + \frac{1}{x})^2} du = -\frac{x^2}{(1 + ux)^2} du$$

$$e^{\frac{1}{x}} h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + ux)^2} \times \frac{1 + ux}{x} e^{-u} du = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 + ux} du$$

5. Cont sous l'int $\left| \frac{e^{-u}}{1 + ux} \right| \leq e^{-u}$.

6. g est cont sur $[0, +\infty[$. $g(0) = 0$. $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$.

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $0^2 g'(0) + g(0) = 0$ donc g est sol sur $[0, +\infty[$.

Si $k \neq 0$, $x \mapsto g(x) + k e^{\frac{1}{x}}$ n'a pas de lim finie en 0 donc pas sol sur $[0, +\infty[$.

7. dér sous l'int $h(x, u) = \frac{x}{1 + ux}$; $\frac{\partial h}{\partial x}(x, u) = \frac{1 \times (1 + ux) - x \times u}{(1 + ux)^2} = \frac{1}{(1 + ux)^2}$

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) = (n!) (-1)^{n-1} (1 + ux)^{-n-1} e^{-u} \quad ; \quad \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) \right| \leq n! e^{-u}$$

$$g(x) \geq \int_0^1 \frac{x}{1 + ux} e^{-u} du = e^{-1} [\ln(1 + ux)]_{u=0}^{u=1} = e^{-1} \ln(1 + x)$$

donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Ex 118. 1. $\int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \text{Arcsin}(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1} \frac{\pi}{2}$

2. $f(0)$ existe et vaut 1.

3. f est cont sous int; $\left| \frac{\cos(ay)}{\sqrt{1-y^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

4. $t = \text{Arcsin}(y)$.

5. dér sous l'int. $g(a, t) = \cos(a \sin(t))$.

$\frac{\partial g}{\partial a}(a, t) = -\sin(t) \sin(a \sin(t))$ $\left| \frac{\partial g}{\partial a}(a, t) \right| \leq 1$

$\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(a, t) = -\sin^2(t) \cos(a \sin(t))$ $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(a, t) \right| \leq 1$.

6. $xy''(x) + xy(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) x \cos(x \sin(t)) dt$

$xy''(x) + xy(x) + y'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[x \cos(t) \cos(x \sin(t)) \cos(t) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \right] dt$

$= \frac{2}{\pi} \left[\cos(t) \sin(x \sin(t)) \right]_{t=0}^{\pi/2} = 0$.

7. $\cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}}_{u_n(t)}$

$\|u_n\|_{\infty} = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Conv norm sur segment $[0, \frac{\pi}{2}]$
 $\rightarrow$ int terme à terme

$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) dt}_{= W_{2n}}$

$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$ (rec).

Ex 14h. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{y+z} f'\left(\frac{x}{y+z}\right)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{1}{(y+z)^2} f''\left(\frac{x}{y+z}\right)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{x}{(y+z)^2} f'\left(\frac{x}{y+z}\right)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2x}{(y+z)^3} f'\left(\frac{x}{y+z}\right) + \frac{x^2}{(y+z)^4} f''\left(\frac{x}{y+z}\right)$

~~idem~~ $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

$\Delta g(x,y,z) = \frac{4x}{(y+z)^3} f'\left(\frac{x}{y+z}\right) + \left[\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{2x^2}{(y+z)^4} \right] f''\left(\frac{x}{y+z}\right)$

$\Delta g = 0 \Leftrightarrow \forall x,y,z > 0, \frac{4x}{y+z} f'\left(\frac{x}{y+z}\right) + \left[1 + 2\left(\frac{x}{y+z}\right)^2 \right] f''\left(\frac{x}{y+z}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t > 0, f''(t) = -\frac{4t}{1+2t^2} f'(t)$

$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall t > 0, f'(t) = C e^{-\cancel{2t} \ln(1+2t^2)} = \frac{C}{1+2t^2}$

$\Leftrightarrow \exists (C,D) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(t) = C \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t) + D$.

Ex 69. $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x f$. $g(x) = F(x)^2 - \int_0^x f^3$.

$\forall x \geq 0, g'(x) = 2f(x)F(x) - f(x)^3 = \underbrace{f(x)}_{\geq 0} \underbrace{[2F(x) - f(x)^2]}_{\text{noté } h(x)}$.

$\forall x \geq 0, h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1-f'(x)) \geq 0$

$h(0) = 0$ donc $h \geq 0$ puis $g' \geq 0$ or $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$.

Cas d'égalité. Hyp. $\forall x \geq 0, g(x) = 0$ donc $\forall x \geq 0, g'(x) = 0$.

Donc $\forall x \geq 0, f(x) = 0$ ou $h(x) = 0$. ($f =$ fonction nulle est une sol.).

Supposons que $f \neq$ fonction nulle. Il existe x_0 tq $f(x_0) > 0$ et même

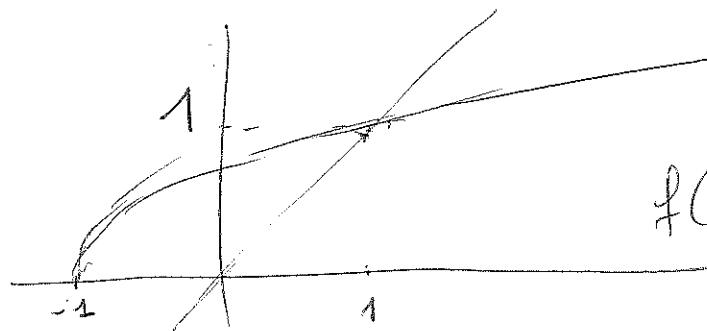
$\forall x \geq x_0, f(x) > 0$ donc $\forall x \geq x_0, h(x) = 0$ puis $\forall x \geq x_0, h'(x) = 0$

puis $\forall x \geq x_0, f'(x) = 1$ donc $\forall x \geq x_0, f(x) = f(x_0) + x - x_0$.

Notons $\alpha = \inf \{x \geq 0; f(x) = 0\}$. Si $\alpha > 0$, alors $f' = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0, \alpha[\\ 1 & \text{sur }]\alpha, +\infty[\end{cases}$ impossible

donc $\alpha = 0$ et $\forall x \geq 0, f(x) = x$ + réciproque.

Ex 62.



$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$f(x) - x \begin{cases} > 0 & \text{si } x < 1 \\ = 0 & \text{si } x = 1 \\ < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a.

~~$[1, 1]$~~ $] -1, 1[$ est stable par f .

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in] -1, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \geq x_n$.

conv: $l = \sqrt{\frac{1+l}{2}}$ donc $l = 1$.

b. $y_n = 1 - x_n$. $y_{n+1} = 1 - x_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} = \frac{1 - \frac{1+x_n}{2}}{1 + \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}}$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2(1 + \sqrt{\frac{1+x_n}{2}})}$$

$$\ln(y_{n+1}) = \ln(y_n) - \ln(2) - \ln(1 + x_{n+1}) = \ln(y_n) - \ln(4) + \ln\left(\frac{1+x_{n+1}}{2}\right)$$

$$\ln(y_{n+1}) - \ln(y_n) = -\ln(4) + \ln\left(1 - \frac{y_{n+1}}{2}\right)$$

Or $0 \leq y_{n+1} \leq \frac{y_n}{2}$ donc $y_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\ln\left(1 - \frac{y_{n+1}}{2}\right) = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

donc $\sum \ln\left(1 - \frac{y_{n+1}}{2}\right)$ conv.

$$\sum_{n=0}^{N-1} [\ln(y_{n+1}) - \ln(y_n)] = \sum_{n=0}^{N-1} (-\ln(4)) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(1 - \frac{y_{n+1}}{2}\right)$$

$$\ln(y_N) = -N \ln(4) + \underbrace{\ln(y_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{y_{n+1}}{2}\right)}_{\text{Constante } C} + o(1)$$

donc $y_N = \frac{e^C}{4^N} e^{o(1)}$

donc

$$y_N \sim \frac{e^C}{4^N}$$