

~~Ex 102.~~

a.

$$\frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} = \left(1 + \frac{l}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right) \quad \text{No}$$

Posons $\varepsilon_n = n \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} - 1 \right) - l$, de sorte que $\varepsilon_n \rightarrow 0$

$$\text{et } \frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

$$\ln \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) - \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \ln \left(1 + \frac{l}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\right) = \ln \left(\frac{a_1}{a_0} \right) - \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

$$\ln \left(1 + \frac{l}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right) \sim \frac{l}{n} \quad \text{si } l \neq 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\right) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

si $l > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ donc rayon = $+\infty$
si $l < 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc rayon = 0.

(règle de d'Alembert)

b. Prenons le cas d'une série géom $\sum \underbrace{q^n}_{\text{not } a_n} z^n$, de rayon $\frac{1}{|q|}$.

$$n \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} - 1 \right) = 0.$$

Pas de conclusion dans ce cas.

Piste noire Samedi 16 juin

$\times 173.$ $\frac{a-}{|A_n|} \leq C n^a$ Parait que ex 103.

$\sum_k \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} = \int_k^{k+1} \frac{t^{-s-1}}{s+1} dt$
 donc $\left| \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right| \leq \frac{1}{|s+1| k^{Re(s)+1}}$
 or $Re(s)+1-\alpha > 1$
 donc conv.

Preuve $\alpha > 0$.

$(|A_n| \geq x) = (A_n \geq x) \cup (A_n \leq -x)$ disj. même proba par symétrie.

$(A_n \geq x) = (e^{\lambda A_n} \geq e^{\lambda x})$

Markov: $P(A_n \geq x) \leq \frac{E(e^{\lambda A_n})}{e^{\lambda x}}$

$\therefore$ Cf épreuve X - ERS.

$g(a) = \frac{a^2}{2} - \ln(\cosh(a))$ $g'(a) = a - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}$

$g''(a) = 1 - 1 + \frac{\cosh^2(a)}{\sinh^2(a)} \geq 0$, $g'(0) = 0$ donc $g' \geq 0$, $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$.

donc $\ln(\cosh(a)) \leq \frac{a^2}{2}$ donc $\cosh(a) \leq e^{a^2/2}$.

$E(e^{\lambda A_n}) = E(e^{\lambda a_1} \dots e^{\lambda a_n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{\lambda a_i}) = (\cosh(\lambda))^n \leq e^{n \lambda^2/2}$

$P(|A_n| \geq x) \leq 2 e^{-\lambda x} e^{n \lambda^2/2}$ On choisit $\lambda = \frac{x}{n}$ et on a:

132. a. Si $\lambda < 0$, les sol sont de la forme $f: x \mapsto a \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda} x) + b \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda} x)$.

$f(0) = 0$ donne $a = 0$ puis $f(1) = 0$ donne $b = 0$ donc non.

Si $\lambda = 0$, les sol sont de la forme $f: x \mapsto ax + b$.
 $f(0) = 0$ donne $b = 0$ puis $f(1) = 0$ donne $a = 0$ donc non.

Si $\lambda > 0$, les sol sont de la forme $f: x \mapsto a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x)$.
 $f(0) = 0$ donne $a = 0$ puis $f(1) = 0$ donne $b \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$.

Si $\sqrt{\lambda} \notin \pi \mathbb{N}$, alors $b = 0$ donc non.

Si $\sqrt{\lambda} \in \pi \mathbb{N}^*$, alors on remarque $x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda} x)$ marche.

b. Prenons une telle fonction f et une fonction φ quelconque de F . Alors $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $\int_0^1 (f + \lambda \varphi)^2 \leq C \int_0^1 (f' + \lambda \varphi')^2$ c'est-à-dire $\int_0^1 (f^2 + 2\lambda f\varphi + \lambda^2 \varphi^2) \leq C \int_0^1 (f'^2 + 2\lambda f'\varphi' + \lambda^2 \varphi'^2)$

on sait que $\int_0^1 f^2 = C \int_0^1 f'^2$. Il reste

$$\lambda^2 \left[-\int_0^1 \varphi^2 + C \int_0^1 (\varphi')^2 \right] + 2\lambda \left[-\int_0^1 f\varphi + C \int_0^1 f'\varphi' \right] \geq 0.$$

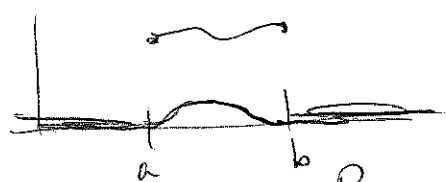
emme. Si a et b sont des const $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $a\lambda^2 + b\lambda \geq 0$, alors $b = 0$.

Dén: min en 0 donc dérivée nulle en 0.

Donc $-\int_0^1 f\varphi + C \int_0^1 f'\varphi' = 0$. or $\int_0^1 f'\varphi' = -\int_0^1 f''\varphi$ (int par part).

donc $\int_0^1 \varphi (f + Cf'') = 0$. Vrai pour toute fonction $f \in F$.

Posons $h = f + Cf''$ et montrons que h est la fonction nulle.
 Si ce n'est pas le cas, il existe $x_0 \in [0, 1]$ $\forall f(x_0) \neq 0$. Par cont, il existe un segment $[a, b]$ sur lequel h ne s'annule pas. Mettons $h|_{[a, b]} > 0$.
 On peut alors construire $\varphi \in F$ $\forall \varphi|_{[0, a]} = 0$,
 $\varphi|_{[b, 1]} = 0$, $\varphi|_{[a, b]} > 0$, de sorte que $\int \varphi h > 0$ (contradiction).



Par exemple $\varphi(x) = (a-x)^3(x-b)^2$
 si $a \leq x \leq b$. (et 0 sinon).

Ex 114. Hyp. $f(t) \not\rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \in [A, \infty[$, $|f(x_A)| \geq \varepsilon_0$. 

(f passe et repasse au-dessus de ε_0).

soit $\lambda > 0$ tel que f soit λ -lipschitzienne. Soit $x \geq 0$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon_0$.

Pour fixer les idées, on suppose que $f(x) \geq \varepsilon_0$.

La lipschitzianité fait que f varie lentement:

$$\forall t \geq 0, |f(x) - f(t)| \leq \lambda |x - t|$$

$$\text{donc } \forall t \geq x, f(t) \geq f(x) - \lambda(t - x) \geq \varepsilon_0 - \lambda(t - x)$$

$$\text{En particulier, } \int_x^{x + \frac{\varepsilon_0}{\lambda}} f(t) dt \geq \frac{\varepsilon_0^2}{2\lambda}$$

$$\text{Si } f(x) \leq -\varepsilon_0, \text{ alors } \int_x^{x + \frac{\varepsilon_0}{\lambda}} f(t) dt \leq -\frac{\varepsilon_0^2}{2\lambda} \text{ par symétrie.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $x_n \in [n, \infty[$ tq $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Alors $\int_{x_n}^{x_n + \frac{\varepsilon_0}{\lambda}} f$  $\rightarrow 0$. Or $\int_{x_n}^{x_n + \frac{\varepsilon_0}{\lambda}} f = \int_{x_n}^{\infty} f - \int_{x_n + \frac{\varepsilon_0}{\lambda}}^{\infty} f$

et cette diff devrait tendre vers 0.

Contradiction.

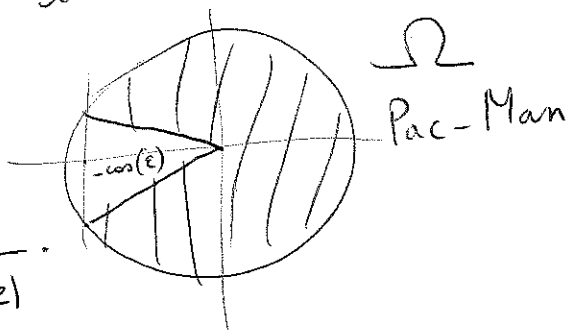
Ex 103.

a. rayon = 1 (tous les arêtes marchent).

b. $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{T_{k-1}(z) - T_k(z)}{k} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{T_l(z)}{l+1} - \sum_{l=1}^n \frac{T_l(z)}{l}$

$= -\sum_{l=1}^{n-1} \frac{T_l(z)}{l(l+1)} - \frac{T_n(z)}{n}$

$T_n(z) = \frac{z(1-z^{n+1})}{1+z}, \quad |T_n(z)| \leq \frac{2}{|1+z|}$



Soit $z \in \Omega$. z est de la forme $re^{i\theta}$ avec $0 \leq r \leq 1$ et $-\pi + \epsilon \leq \theta \leq \pi - \epsilon$.
 $|1+z|^2 = 1 + r^2 + 2r \cos(\theta) \geq 1 + r^2 - 2r \cos(\epsilon) = (r - \cos(\epsilon))^2 + \sin^2(\epsilon) \geq \sin^2(\epsilon)$

donc $|T_n(z)| \leq \frac{2}{\sin^2(\epsilon)}$. Ainsi $\left| \frac{T_n(z)}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et même $\left\| \frac{T_n}{n} \right\|_{\infty, \Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\left\| \frac{T_l}{l(l+1)} \right\|_{\infty, \Omega} \leq \frac{1}{l^2} \rightarrow \text{conv norm.}$ Donc conv unif sur Ω et la somme est bien f.

c. $\forall x \in [0, 1], l_\theta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{ik\theta}}{k} x^k$ dér en série entière, dér terme à terme.

$\forall x \in [0, 1], l'_\theta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{ik\theta} x^{k-1} = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}x}$

d. $L'(x) = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}x} \exp(l_\theta(x)), \quad L''(x) = -\left(\frac{e^{i2\theta}}{(1+e^{i\theta}x)^2} \right) e^{l_\theta(x)} + \left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}x} \right)^2 e^{l_\theta(x)} = 0$

$L'(x) = L'(0) = e^{i\theta}$ et $L(x) = L(0) + L'(0)x = 1 + e^{i\theta}x$.

e. Par conv unif la fonction L est contin donc $e^{l_\theta(1)} = 1 + e^{i\theta}$.

c'est-à-dire $\exp(f(e^{i\theta})) = 1 + e^{i\theta}$.

~~Ainsi, pour tout $\theta \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$, il existe $n(\theta) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(e^{i\theta}) = 1 + e^{i\theta}$.
 n est continue, à val entières, donc c'est une const sur $[-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$.
 $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \in \mathbb{R}$ donc $n(\theta) = 0$ donc $n(\theta) = 0$. $f(e^{i\theta})$ est une sorte de logarithme de $1 + e^{i\theta}$.
 $\forall \theta \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon], f(e^{i\theta}) = i\theta$. $f(z)$ est une sorte de log de $1+z$.~~