

Ex 145. $\pi_n = n \times P(\text{la boîte 1 est vide et pas les autres}) = n \times \frac{1}{n}$

$\Omega = \{ f : [1, n] \rightarrow [2, n] \}$ $|\Omega| = (n-1)^n$

$A = \{ f \text{ est surj} \}$ $|A| = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{choix de} \\ \text{l'élément qui a} \\ \text{deux antécédents}}}{(n-1)} \times \overset{\substack{\uparrow \\ \text{choix} \\ \text{des} \\ \text{antécédents}}}{\binom{n}{2}} \times (n-2)!$

$\pi_n = \frac{n! \times \frac{n(n-1)}{2}}{(n-1)^n} = \frac{n!}{n^n (1-\frac{1}{n})^n} \times \frac{n(n-1)}{2} \sim e^{-n} \sqrt{2\pi n} \times \frac{n^2}{2e^{-1}}$

$\pi_n \sim \frac{e}{2} \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{5/2}$ Bd.

Ex 148

$n=1 \rightarrow 1$ $\{1\}$	$n=2 \rightarrow 1$ $\{1\}, \{2\}$	$n=3 \rightarrow 2$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$
$n=4 \rightarrow 2$ $\{1, 3, 4\}$ $\{2, 3\}$	$n=5 \rightarrow 3$ $\{3, 4, 5\}$	$n=6 \rightarrow 3$ $\{4, 5, 6\}$ ou $\{3, 4, 5\}$

pas 4 car : ~~$\{1, 2, 4, 6\}$~~ non.
 1 $\Rightarrow$ pas 2 mais deux consécs
 2 $\Rightarrow$ pas 1 ni 4 donc $\{2, 3, 5, 6\}$
 3 $\Rightarrow \{3, 4, 5, 6\}$ pas bon.
 non car $6 = 3 + 3$.

Conj: $2n \rightarrow n$
 $\{n+1, \dots, 2n\}$
 $\{n, \dots, 2n-1\}$

$2n+1 \rightarrow n+1$
 $\{n+1, \dots, 2n+1\}$

Déjà, $C_{2n} \geq n$ et $C_{2n+1} \geq n+1$.

si $C_{2n} = n$ avec $\{n, \dots, 2n-1\}$ en seule solution.
 si $C_{2n} > n$, ça nécessite de prendre l'élément $2n$ avec $2n-1$ éléments de $\{1, \dots, 2n-1\}$ donc de prendre $1, \dots, 2n-1$ mais pas possible.

si $C_{2n} \leq n$, alors $C_{2n+1} \leq n+1$ donc ok.

Piste noire lundi 18 juin 2018

Ex 165 -

a. Bienaymé - Tchebychev: $P(|A_\lambda - E(A_\lambda)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(A_\lambda)}{(\varepsilon \lambda)^2}$

c'est-à-dire $0 \leq P(|A_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \lambda}$

donc $P(|A_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$.

b. Notons D_λ l'événement en question.

$D_\lambda = \{B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda \geq 0\}$. Prenons ε petit.
(genre $\varepsilon = \frac{1}{4}$).

~~Si $|A_\lambda - \lambda| < \varepsilon \lambda$ et $|C_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon \lambda$, alors
 $A_\lambda \geq (1-\varepsilon)\lambda$ et $C_\lambda \geq (1-\varepsilon)\lambda$ donc $B_\lambda^2 \geq 4(1-\varepsilon)^2 \lambda^2$
 donc $B_\lambda \geq 2(1-\varepsilon)\lambda$ donc $B_\lambda - \lambda \geq (1-2\varepsilon)\lambda$.~~

~~Prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple.~~

~~$D_\lambda = D_\lambda \cap A$~~

Si $|A_\lambda - \lambda| \leq \varepsilon \lambda$ et $|C_\lambda - \lambda| \leq \varepsilon \lambda$, alors $A_\lambda - \lambda \geq -\varepsilon \lambda$ idem C
 donc $A_\lambda \geq (1-\varepsilon)\lambda$ et $C_\lambda \geq (1-\varepsilon)\lambda$ donc $B_\lambda \geq 2(1-\varepsilon)\lambda$
 donc $B_\lambda \geq -\lambda \geq (1-2\varepsilon)\lambda$.

$$D_\lambda = \left[D_\lambda \cap (|A_\lambda - \lambda| \leq \varepsilon \lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| \leq \varepsilon \lambda) \right] \cup \left[D_\lambda \cap (|A_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon \lambda) \right] \cup \left[D_\lambda \cap (|C_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon \lambda) \right]$$

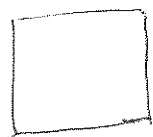
$$P(D_\lambda) \leq P(|B_\lambda - \lambda| \geq (1-2\varepsilon)\lambda) + P(|A_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon \lambda) + P(|C_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon \lambda)$$

donc $P(D_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$.

Ex 171.



a. Les points extrémaux de $B_f(0,1)$ sont les éléments du cercle $S(0,1)$.



b. Cette fois, ce sont les quatre sommets du carré.

c. Si u est un point extrémaux de X , alors ce n'est pas un milieu.
(car sinon, $X \setminus \{u\}$ ne serait pas convexe).

Hyp: u n'est pas le milieu de deux points de $X \setminus \{u\}$.
Soient u_0 et $u_1 \in X \setminus \{u\}$. Posons $u_t = (1-t)u_0 + t u_1$.

Alors pour tout $t \in [0,1]$, $u_t \in X$ (X est convexe)

et même $u_t \in X \setminus \{u\}$. Sinon, il existerait $t \in]0,1[$

tg $u_t = u$ et en prenant $\varepsilon = \min(t, 1-t)$, u serait le milieu de $u_{t-\varepsilon}$ et $u_{t+\varepsilon}$.

d. En fixant une base orthonormale de E et en prenant les représentations dans cette base, ça revient à montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$, notée B_1 .

$$B_1 = \{M \in M_n(\mathbb{R}) ; \|M\| = 1\}.$$

Détermination de $\|M\|$. $\|M\|^2 = \langle U, M^T M U \rangle$

On diagonalise $M^T M$: $P^T M^T M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \leftarrow L$
 $P \in O_n(\mathbb{R})$

En posant $V = P^T U$,
 $\|V\| = \|U\|$

$$\|M\|^2 = \langle V, L V \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k^2 \quad \text{On prouve que } \|M\|^2 = \max \text{sp}(M^T M).$$

$$\text{Effet } B_1 = \{M \in M_n(\mathbb{R}) ; \text{sp}(M^T M) \subset [0,1]\}.$$

$$\text{or } O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) ; \text{sp}(M^T M) = \{1\}\} \quad \text{ça devrait aider.}$$

Prendons $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $A, C \in B_1$, tg $\frac{A+C}{2} = Q$. $U \in B_1$.

$$\|U\| \|QU\| \leq \frac{1}{2}(\|AU\| + \|CU\|) \leq \|U\| \quad \text{donc } \|AU\| = \|U\|, \|CU\| = \|U\| \text{ donc } A \text{ et } C \text{ sont dans } O_n(\mathbb{R}).$$

$$\text{car, il suffit d'écrire } \|Q\| \leq \frac{\|A\| + \|C\|}{2} = 1$$

$$Q^T Q = I_n \quad \text{donc } \frac{A+C}{2} \left(\frac{A+C}{2} \right)^T = I_n \quad \text{donc } C^T A + A^T C = 2I_n.$$

$$\|A-C\|^2 = \text{tr}(A^T A + C^T C - C^T A - A^T C) = 0 \quad \text{donc } A=C \quad \text{donc } Q \text{ est un pt extrémaux.}$$

À finir.

171. d. réciproque.

Soit $M \in$ (sphère unité de $M_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R})$).

But. Écrire M comme le milieu d'un couple d'éléments de la sphère unité.

$$M = OS$$

$$O \in O_n(\mathbb{R}), S \in S_n(\mathbb{R}).$$

Décomp.

$$\|M\| = \|S\| = \max \text{val pr } S^T S = \max \text{val pr } S^2.$$

$$\|M\| = 1 \quad \text{donc} \quad \text{Sp}(S^2) \subset [0, 1] \quad \text{donc} \quad \text{Sp}(S) \subset [-1, 1].$$

Si $\text{Sp}(S) \subset \{\pm 1\}$ alors ~~S est une sym orth~~ $S \in O_n(\mathbb{R})$ (sym orth).

Mais alors $M \in O_n(\mathbb{R}) \rightarrow$ faux. Donc il existe une val pr $\lambda \neq \pm 1$.

$$\text{Mettons que } {}^t P S P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad |\lambda_1| \neq 1.$$



En notant $\begin{pmatrix} S_0 \\ \vdots \\ S_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} {}^t P S_0 P &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ -1 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^t P S_1 P &= \begin{pmatrix} 0 & \ddots & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a un segment $[OS_0, OS_1]$ qui contient M inclus dans X

Ex 174. Notons $y = f \circ x$.

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(u) du = \int_a^b \langle \vec{\nabla} f(x(u)), x'(u) \rangle du$$

$$\text{or } \|\vec{\nabla} f(x(u)) - x'(u)\|^2 = \|\vec{\nabla} f(x(u))\|^2 + \|x'(u)\|^2 - 2\langle \vec{\nabla} f(x(u)), x'(u) \rangle.$$

Varià...

Definition

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall U \in M_n(\mathbb{R}), (U|AU) \geq 0.$$

Ex 179.

a. Direct.

b.

$$(v|u \cdot u^T v) = (u^T v)^2 \geq 0.$$

c. Fait en classe pendant l'année.

d.

On écrit

th spectral:

$$P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } P^T B P = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$B = C^2 \text{ avec}$$

$$C = P \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\beta_n} \end{pmatrix} P^T.$$

C'est sym.

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n c_{i,k} c_{k,j} = \sum_{k=1}^n c_{i,k} g_{j,k}.$$

$$(U|(A \odot B)U) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} u_i u_j \sum_{k=1}^n c_{i,k} g_{j,k} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} (u_i c_{i,k}) (u_j g_{j,k}) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (U_k | A U_k) \geq 0 \quad \text{avec } U_k = \begin{pmatrix} u_1 c_{1,k} \\ \vdots \\ u_n c_{n,k} \end{pmatrix}.$$

e.

On met bout à bout les diverses règles de calcul.

$$V = (u_i^T \cdot u_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$X^T V X = \sum_i \sum_j u_i^T u_j x_i x_j = \left\| \sum_{i=1}^n x_i U_i \right\|^2 \geq 0.$$

et puis varià.