

Autres exercices.

Ex 14. a. Soit $a \in E$ tq $\text{Im}(f) = \text{Vect}(a)$.

Alors $f(a) \neq 0$ car sinon $f^2 = 0$ donc $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.
De plus, $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(n)$ de suppl.

b. $f(a) \in \text{Im}(f)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $f(a) = \lambda a$.

soit $x \in E$. $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$
 $a = a_1 + a_2$

Alors $f(a) = \lambda a_1$ et $f^2(a) = \lambda^2 a_1 = \lambda f(a)$.

Ex 29. $M_{p,q} = \underbrace{a_{p,q}}_{i \in \mathbb{R}} + i \underbrace{b_{p,q}}_{i \in \mathbb{R}}$ $\overline{M}_{p,q} = a_{p,q} - i b_{p,q}$
 $M = A + iB, \quad \overline{M} = A - iB$.

a. $F: t \mapsto \det(A + tB)$ est polynomiale d'coeffs réels. $F(i) = \overline{F(i)}$
c'est-à-dire $\det(M) = \det(\overline{M})$.

b. Oui: les $I_n + E_{ij}$.

c. ~~$\det(I_n + M \overline{M}) = \det \begin{pmatrix} I_n & M \\ -\overline{M} & I_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} I_n & -M \\ \overline{M} & I_n \end{pmatrix}$~~
 ~~$\det(I_n + \overline{M} M) = \det \begin{pmatrix} -I_n & \\ & \end{pmatrix}$~~

$\begin{pmatrix} I_n & M \\ -\overline{M} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -M \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{M} & \overline{M}M + I_n \end{pmatrix}$
par blocs

$\begin{pmatrix} I_n & -M \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & M \\ -\overline{M} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + M\overline{M} & 0 \\ -\overline{M} & I_n \end{pmatrix}$

donc $\det(I_n + \overline{M}M) = \det(I_n + M\overline{M})$
conj. donc réel

Ex 39. $\chi_A = (X+5)(X^2+9X+38)$

Berky parente.

Ex 55. Se donner un produit scalaire, c'est trouver (b_1, b_2) base ortho-normale pour ce prod scal.

Analyse. On suppose que oui. $\det(A) = 1$ donc f est une rotation.

$M(f)_{\text{base ortho}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ donc trace: $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.

Changeons l'angle d'attaque. Notons $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

et $b_{i,j} = (e_i | e_j)$.

$$(f(e_1) | f(e_1)) = \|2e_1 - e_2\|^2 = 4b_{1,1} - 4b_{1,2} + b_{2,2}$$

$$(f(e_1) | f(e_2)) = (2e_1 - e_2 | e_1 - e_2) = 2b_{1,1} - 3b_{1,2} + b_{2,2}$$

$$(f(e_2) | f(e_2)) = \|e_1 - e_2\|^2 = b_{1,1} - 2b_{1,2} + b_{2,2}$$

f préserve le prod scal donc

$$\begin{cases} 3b_{1,1} - 4b_{1,2} + b_{2,2} = 0 \\ 2b_{1,1} - 3b_{1,2} + b_{2,2} = 0 \\ b_{1,1} - 2b_{1,2} = 0 \end{cases}$$

Ex 55. $\chi_A = X^2 + X - 1$

Si c'était une isométrie, le poly car serait $X^2 - 1$ ou $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$.

Donc non.

Ex 60.

Ex 60. Classique. M est un mult de I_n

4^{es} cas. $\Leftrightarrow$ pour tout $U \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, MU est prop à U .

si $M \in \text{Vect}(I_n)$, $\mathcal{E} = \{M\}$ ok.

hyp. $M \notin \text{Vect}(I_n)$. Il existe $U \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tq $MU \notin \text{Vect}(U)$.

On peut compléter (U, MU) en une base $(U_1, \dots, U_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

En posant $P = (U_1 | \dots | U_n)$, $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{*} \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \end{pmatrix}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On peut compléter $(U, \frac{1}{\alpha} MU)$ est une base $(V_1, \dots, V_n)$

de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. En posant $Q = (V_1 | \dots | V_n)$, $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{*} \\ \alpha & \\ 0 & \\ \vdots & \end{pmatrix}$.

$\mathcal{E}$ n'est pas borné. $\boxed{\|Q^{-1}MQ\|_\infty \geq |\alpha|}$.

Ex 96. $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc rayon = 1.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) x^n = \text{Re} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)} x^n}_{g(x)} \right).$$

$$\forall x \in]-1,1[, g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)} x^{n-1} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{1 - ix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1+i)(1+ix)}{1+x^2}.$$

$$f'(x) = \text{Re}(g'(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1-x}{1+x^2}.$$

$$f(0) = 0$$

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(\text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right).$$

Ex 105. $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{\operatorname{Arctan}(t)} dt$. $e^{x^3} g(x) \leq f(x) \leq e^{x^2} g(x)$

$x \in]0, 1[\leftarrow$

avec $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\operatorname{Arctan}(t)}$.

$$\frac{1}{\operatorname{Arctan}(t)} - \frac{1}{t} = \underbrace{\frac{t - \operatorname{Arctan}(t)}{t^2}}_{\text{noté } \varphi(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

done φ est int sur $]0, 1[$.

$$\int_x^{x^2} \varphi(t) dt = \int_x^1 - \int_x^{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = -\ln(x) \text{ donc } g(x) = -\ln(x) + o(1)$$

$$\text{et } f(x) = -\ln(x) + o(1).$$

Ex 106.

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x).$$

$$= \left[-2x^{-1/2} \right]_x^1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$\int_x^1 \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}} dx = \int_x^1 \frac{x^{3/2} dx}{x^{3/2}} - \int_x^1 \frac{\sin^2(x)}{\underbrace{x^{3/2}}_{\varphi(x)}} dx -$$

$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ done φ est int sur $]0, 1[$.

$$\int_x^1 \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}} dx = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2 - \int_x^1 \varphi(x) dx \xrightarrow{x \rightarrow 0} +o(1).$$

Ex 109.

Posons

~~$f(x) = \int_0^x u(t) v(t) dt$~~

$$U(x) = \int_0^x u(t) dt$$

$$V(x) = \int_0^x v(t) dt.$$

$$u(x) v(x) \leq c v(x) + v(x) \int_0^x u(t) v(t) dt \quad W(x) = \int_0^x u(t) v(t) dt.$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} W(x) e^{-V(x)} \quad f'(x) = e^{-V(x)} [W'(x) - v(x) W(x)]$$

$$f'(x) = e^{-V(x)} \left[u(x) v(x) - v(x) \int_0^x u(t) v(t) dt \right]$$

$$\leq e^{-V(x)} c v(x).$$

$$f(0) = 0.$$

$$f(x) \leq c \int_0^x e^{-V(t)} v(t) dt = c \left[-e^{-V(t)} \right]_{t=0}^{t=x} = c [1 - e^{-V(x)}]$$

$$\text{donc } W(x) \leq c e^{V(x)} - c$$

$$\text{or } u(x) \leq c + W(x) \quad \text{donc } u(x) \leq c e^{V(x)}.$$

Ex 113. a. $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[.$ $f(x) = \int_1^{+\infty} -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$

f est une prim de φ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

b. $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2}$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{1}{t} dt + \int_x^1 \frac{-1+e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) \rightarrow \int_0^1 \frac{-1+e^{-t}}{t} dt$$

$$f(x) = -\ln(x) + \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + o(x).$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left[t f(t) \right]_a^b - \int_a^b t f'(t) dt = \left[\dots \right] + \int_a^b e^{-x} dx$$

$\xrightarrow{a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty} 1$

$$\int_a^b f \xrightarrow{a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty} 1$$