Devoir de vacances de mathématiques — PC*

Problème 1 (*)

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis d'en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis

Question 1. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Question 2. Calculer les intégrales W_0 et W_1.

Question 3. Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2}\,\mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n.$$

Question 5. Montrer que la suite $((n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Question 6. Montrer que W_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver les relations suivantes

$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Deuxième partie : l'équivalent de Stirling

Le but de cette partie est de prouver que $n!$ est équivalent à $n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \dfrac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(q_n)$.

Question 8. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver l'égalité $u_n - u_{n-1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1$.

Question 9. Prouver que $u_n - u_{n-1}$ est équivalent à $-\dfrac{1}{12n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Question 11. En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite finie ℓ strictement positive.

Question 12. En écrivant de deux manières la limite de $\sqrt{2p}\,\mathrm{W}_{2p}$ quand p tend vers $+\infty$, obtenir l'égalité $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Intermède 1 (*)

a. Pour tout x réel, montrer que $\mathrm{Arctan}(x)$ est un argument de $1 + \mathrm{i}x$.

b. Pour tout x réel, en déduire l'égalité $\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$.

c. Montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ est convergente et calculer sa somme..

Problème 2 (*)

Première partie (quelques calculs préliminaires)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. On note φ la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

Question 13. Justifier les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Question 14. Démontrer les égalités $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Question 15. On suppose que A est de dimension finie. Montrer l'égalité $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Deuxième partie (rang des itérés d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation u^k désigne l'itérée k-ième d'ordre k, c'est-à-dire la composée $u \circ \cdots \circ u$, dans laquelle la lettre u apparaît k fois. En particulier, la notation u^0 désigne Id_{E}.

Question 16. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$.

Question 17. Montrer que la suite de terme général $\delta_k = \mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1})$ est décroissante.

Question 18. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$, on ait $\delta_k = 0$. Dans la suite, on choisit p minimal pour cette propriété.

Question 19. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.

Question 20. On note v la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^p)$. Montrer que v est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u^p)$.

Troisième partie (endomorphismes nilpotents)

On reprend les notations de la deuxième partie, notamment l'endomorphisme u de E et l'entier p. On suppose de plus que u est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier s tel que u^s soit l'application nulle.

Question 21. Montrer que u^p est l'application nulle mais pas u^{p-1}.

Question 22. Montrer l'inégalité $p \leqslant n$.

Question 23. Dans cette question, on ajoute l'hypothèse $p = n$. On considère un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ et on lui associe la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et écrire la matrice de u relativement à cette base.

Pour tout le reste du problème, on suppose que n vaut 5 et que p vaut 3.

Question 24. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Question 25. Montrer que le rang de u^2 vaut 1 et que le rang de u vaut 2 ou 3.

Question 26. Dans cette question, on suppose que le rang de u vaut 2. Montrer l'existence de vecteurs e_3, e_4, e_5 de E tels qu'en posant

$$e_2 = u(e_3) \qquad \text{et} \qquad e_1 = u^2(e_3),$$

la famille (e_1, e_4, e_5) soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ soit une base de E. Donner alors la matrice de u dans cette base.

Question 27. Dans cette question, on suppose que le rang de u vaut 3. Montrer qu'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème 3 (**)

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

Pour tout entier n, on pose $A_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{2^n \times n!}(A_n)^{(n)}$. Les polynômes P_n sont les *polynômes de Legendre.*

Question 28. Calculer P_0, P_1 et P_2.

Question 29. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que P_n possède la même parité que n. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Question 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer l'égalité

$$(A_n^{(n)}|Q) = (-1)^k (A_n^{(n-k)}|Q^{(k)}).$$

Question 31. En déduire que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Question 32. Exprimer $||A_n^{(n)}||^2$ en fonction d'une intégrale de Wallis puis en déduire la valeur de $||P_n||$.

Question 33. Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$\big((X^2 - 1) \times (X^2 - 1)^n\big)^{(n+2)} = \Big(\big((X^2 - 1)^{n+1}\big)'\Big)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1 - X^2)P_n'' - 2XP_n' + n(n + 1)P_n = 0.$$

Question 34. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction

$$f_n : t \mapsto (P_n(t))^2 + \frac{1 - t^2}{n(n + 1)}(P_n'(t))^2.$$

En déduire que l'inégalité $|P_n(t)| \leqslant 1$ est valable pour tout t dans $[-1, 1]$.

Question 35. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a. Montrer qu'il existe $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ vérifiant l'égalité

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k.$$

b. Montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul pour tout $k \in [\![0, n - 2]\!]$ ainsi que pour $k = n$.

c. Préciser les valeurs de $a_{n,n-1}$ et de $a_{n,n+1}$ puis en déduire une relation de récurrence entre les polynômes de Legendre.

d. Calculer ainsi les polynômes P_3, P_4 et P_5.

Question 36. (***) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

a. Première méthode : utiliser le théorème de Rolle à répétition.

b. Deuxième méthode : montrer que dans le cas contraire, la formule de question 3 serait mise en défaut par un polynôme Q bien choisi.

Intermède 2 (**) Trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrices inversibles.

Problème 4 (*)

On fixe un élément p de $]0, \frac{1}{2}[$.

Leonhard Euler gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce donnant `pile` avec la probabilité p. S'il obtient `pile`, il progresse d'une marche ; s'il obtient `face`, il avance de deux marches d'un coup.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et on note D_n le nombre de fois où Leonhard a progressé par enjambées de deux marches au cours des n premiers pas ; on note enfin Y_n le nombre de pas effectués au moment où Leonhard atteint ou dépasse (pour la première fois) la n-ième marche.

On suppose que $\mathrm{X}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{Y}_n$ sont des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

Question 37. Reconnaître la loi de D_n.

Question 38. Exprimer X_n en fonction de D_n. En déduire la loi de X_n, ainsi que son espérance et sa variance.

Question 39. Déterminer l'univers image $\mathrm{Y}_n(\Omega)$.

Question 40. Déterminer la loi de Y_1 et calculer son espérance. Même question pour Y_2.

Question 41. Pour tout entier naturel k et tout entier $n \geqslant 3$, prouver la relation

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = p \times \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k-1) + (1-p) \times \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-2} = k-1).$$

Question 42. Pour tout entier $n \geqslant 3$, en déduire la relation

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = p \times \mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-1}) + (1-p) \times \mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-2}) + 1.$$

Question 43. Trouver un α réel pour lequel la suite de terme général $u_n = n\alpha$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = p \times u_{n-1} + (1-p) \times u_{n-2} + 1.$$

On fixe un tel α et on pose $v_n = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) - \alpha n$.

Question 44. Trouver une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$. Obtenir finalement une expression de $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$.

Intermède 3 (***) Soient a et b distincts dans $\mathbb{C}$. Soient P et Q deux polynômes complexes **non constants**.

On fait les hypothèses $\mathrm{P}^{-1}(\{a\}) = \mathrm{Q}^{-1}(\{a\})$ et $\mathrm{P}^{-1}(\{b\}) = \mathrm{Q}^{-1}(\{b\})$. Montrer que P et Q sont égaux.

Problème 5 (**)

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynomiale

$$f_n : x \mapsto x^n + x,$$

définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans $[0, 1]$. Cette solution est notée x_n.

b. Pour tout entier $n \geqslant 2$, comparer les nombres $f_n(x_n)$ et $f_{n+1}(x_n)$. En déduire une inégalité entre x_n et x_{n+1}.

c. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente.

d. Au moyen d'une démonstration par l'absurde, justifier que la limite de cette suite vaut 1.

On pose $y_n = 1 - x_n$.

e. Pour tout entier $n \geqslant 2$, justifier l'égalité $\ln(y_n) = n \ln(1 - y_n)$.

f. Prouver que $\ln(y_n)$ est équivalent à $-\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que y_n est équivalent à $\ln(n)/n$.