

Recueil des oraux de mathématiques PC* — lycée Henri Poincaré

Exercice 1. (CCP PC 2018, Bilal Ounejjar)

Soit $r > 0$. Soit f une fonction développable en série entière sur $] - r, r[$.

Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$y' + \frac{\alpha}{x}y = \frac{f(x)}{x}.$$

Pour tout $x \in]0, r[$, on pose

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u) \, du.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \frac{\alpha}{x}y = 0$.

2. Pour tout $x \in]0, r[$, montrer l'existence de $M_x \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [0, x], \quad |f(t)| \leq M_x.$$

En déduire que pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable sur $]0, x]$.

3. Montrer que la fonction $T_\alpha(f)$ est solution de (E) sur $]0, r[$ puis résoudre (E) sur cet intervalle.

4. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]0, r[, \quad T_\alpha(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n + \alpha} x^n.$$

5. Montrer que (E) admet une unique solution sur $]0, r[$ qui possède une limite finie en 0.

Exercice 2. (CCP PC 2018, Bilal Ounejjar)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X - 1)^{2n+1} - 1$.

1. Déterminer les racines du polynôme P .

2. En déduire une simplification du produit $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 3. (ENS PC 2018, Inconnu)

Soit $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Combien de coefficients nuls P peut-elle avoir ?

Exercice 4. (Mines-Ponts PC, 2018, Arthur Jolimet)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A la matrice de coefficients

$$a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \sum_{k=1}^n \frac{k}{k + \lambda} = 0.$$

2. En déduire que la matrice A est diagonalisable.

3. Calculer la somme des carrés des valeurs propres de A.

Exercice 5. (Mines-Ponts PC, 2018, Arthur Jolimet)

Soient P et Q deux polynômes réels non nuls.

L'équation $\frac{P(x)}{Q(x)} = e^x$ peut-elle avoir une infinité de solutions ?

Exercice 6. (X-ESPCI PC 2018, Inconnu)

Soit $M \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$. Montrer que M admet 1 pour valeur propre.

Exercice 7. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Trouver un équivalent de $\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Exercice 9. (Mines-Ponts PC 2018, Matthieu Chatelain)

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$.

Exercice 10. (Mines-Ponts PC 2018, Matthieu Chatelain, Ariella Liberati)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{(x+n)\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$.
3. Montrer que sa somme, notée f est continue sur $[0, +\infty[$. Montrer aussi qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On pourra pour cela prouver la minoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [n, +\infty[, \quad f(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

5. Montrer que $f(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

(Apparemment, il était attendu d'utiliser le théorème de la double limite, qui n'est pas au programme.)

Exercice 11. (X-ESPCI PC 2018, Virgile Rouffeteau)

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1. Montrer que cette intégrale existe et qu'on a défini ici un produit scalaire.

2. Montrer l'existence d'une base orthonormale $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire telle que pour chaque $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la famille $(P_0, \dots, P_i)$ soit une base de $\mathbb{R}_i[X]$.

3. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que le polynôme P_i est scindé, à racines simples, et que toutes ses racines sont dans $[-1, 1]$.

Exercice 12. (Mines-Ponts PC 2018, Bilal Ounejjar)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \ln(k)$.

1. À l'aide d'intégrales, montrer que v_n est équivalent à $n \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité

$$\ln \left({}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} \right) - \ln \left({}^n\sqrt{n!} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\ln(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) \right).$$

3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{{}^n\sqrt{n!}}$.

4. Démontrer la relation $v_n = n \ln(n) - n + o(n)$.

5. Étudier la convergence de la série de terme général $1/{^n\sqrt{n!}}$.

Exercice 13. (Mines-Ponts PC 2018, Bilal Ounejjar)

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Déterminer ses éléments propres.

2. On pose $z_n = 1 + i\alpha/n$ et $u_n = (z_n)^n$.

a. Montrer que z_n possède un argument θ_n dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

b. Trouver un équivalent de θ_n quand n tend vers $+\infty$.

c. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Étudier la convergence de la suite de matrices $(A_n^n)_{n \geq 1}$. Interprétation géométrique.

Exercice 14. (CCP PC 2018, Arthur Jolimet)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) \, dx$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

2. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, obtenir une relation de la forme $\sum_{n=0}^N (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x} \, dx - v_N$ en précisant l'expression de v_N .

4. En déduire l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x} \, dx$.

5. Trouver deux constantes a et b telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a + b(n+2)(n+1)u_n.$$

6. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Exercice 15. (CCP PC 2018, Arthur Jolimet)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$.

1. Exprimer $|1 + z|$ en fonction de θ .
2. Montrer que $|1 + z| \geq 1$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.

Exercice 16. (ENS PC 2018, Inconnu)

Soit P un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que tous les coefficients de P sont de même signe si, et seulement si, toutes ses racines sont négatives.
2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On suppose que sa fonction génératrice G_Y , qui est un polynôme, est scindée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que Y suit la même loi qu'une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli (par forcément toutes de même loi).

Exercice 17. (ENS PC 2018, Inconnu)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) Les $a_{i,j}$ valent tous 0 ou 1.
- (ii) Les $a_{i,i}$ valent tous 0.
- (iii) Il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que chaque colonne contienne exactement k coefficients égaux à 1.
- (iv) Pour tout couple (i, j) d'indices distincts entre 1 et n , il existe un unique indice ℓ tel que $a_{i,\ell}$ et $a_{\ell,j}$ soient tous deux égaux à 1.

1. Déterminer le spectre de la matrice A^2 .
2. Montrer l'égalité $n = k^2 - k + 1$.

Exercice 18. (CCP PC 2018, Inconnu)

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant u_0 dans $] -1, 0[$ et en appliquant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. On définit la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Étudier les variations de f . En déduire que l'intervalle $] -1, 0[$ est stable par f .
2. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $] -1, 0[$ et en déduire que cette suite converge. Préciser sa limite.
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$. Exprimer sa somme en fonction de u_0 .
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
5. Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

6. On pose $a_n = (u_n)^{-1} - (u_{n+1})^{-1}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite, notée L pour le reste de cet énoncé.

7. On admet que $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ tend vers L quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n .

8. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 19. (CCP PC 2018, Inconnu)

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

Étudier les points critiques de f puis ses extremums éventuels.

Exercice 20. (CCP PC 2018, Inconnu)

Soit E un espace euclidien de dimension au moins 2. Soient a et b deux vecteurs de E orthogonaux entre eux. On définit

$$\varphi : x \mapsto x + (a|x)a + (b|x)b.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.

2. On suppose que E est de dimension 3. On se donne une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que $a \in \text{Vect}(e_1)$ et $b \in \text{Vect}(e_2)$.

Écrire la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{E}$, matrice notée M.

3. Préciser les éléments propres de φ . Déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}MP = D$.

4. Généraliser cette étude au cas où E est de dimension n quelconque.

Exercice 21. (CCP PC 2018, Inconnu)

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$.

Exercice 22. (Centrale PC 2018, Inconnu)

On considère l'équation différentielle (E) : $ty' - y = 1 - e^t$.

1. Résoudre cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

2. Peut-on prolonger par continuité ces solutions sur $\mathbb{R}$? Le cas échéant, les fonctions prolongées sont-elles dérivables en 0 ?

3. Trouver des équivalents des solutions de (E) en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 23. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Deux joueurs de football tirent des penaltys à tour de rôle. Le joueur 1 marque un but avec une probabilité p_1 . Le joueur 2 marque un but avec une probabilité p_2 . On suppose que les résultats des tirs sont indépendants. Le premier joueur à marquer un but gagne le match.

1. Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.

2. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

3. Pour quelles valeurs de p_1 peut-on choisir p_2 de manière à avoir un jeu équitable ?

Exercice 24. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

On fixe un entier $n \geq 3$ et on définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A et préciser ses éléments propres.

Exercice 25. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$ en posant $u_0(x) = 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt.$$

1. Montrer qu'on définit bien ainsi une suite de fonctions continues.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, prouver l'encadrement $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$. La fonction limite est notée u .
4. Montrer que la convergence est uniforme. Montrer aussi que la fonction u n'est pas la fonction nulle.

Exercice 26. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

On note F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + u_n.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension finie et préciser sa dimension.
2. Pour tout entier $p \geq 3$, on note v_p le nombre de parties A de $\llbracket 0, p \rrbracket$ telles que l'écart entre deux éléments quelconques de A soit supérieur ou égal à 3.
Montrer que la suite $(v_{n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de F .

Exercice 27. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n . Nature de la série de terme général $10 - n^{1/p_n}$.

Exercice 28. (CCP PC 2018, Romain André)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la famille A, A^2 est-elle liée ?
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 29. (Centrale PC 2018, Inconnu)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E . Soient α et β deux nombres complexes. On fait l'hypothèse

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g.$$

Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

On commencera par le cas particulier $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ puis $\beta = 0$.

Exercice 30. (TPE-EIVP PC 2018, Inconnu)

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A + I_n$ est inversible.

Exercice 31. (TPE-EIVP PC 2018, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3} \right)$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

Indication : $n^2 + 3n + 3 = 1 + (n + 1)(n + 2)$.

Exercice 32. (TPE-EIVP PC 2018, Inconnu)

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$.

1. En utilisant le changement de variable $u = 1/t$, prouver l'égalité $I = J$.
2. À l'aide de la relation $I = (I + J)/2$ et du changement de variable $x = t - 1/t$, calculer I .

Exercice 33. (TPE-EIVP PC 2018, Inconnu)

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout couple (M, N) d'éléments de E , on pose $\Phi(M, N) = \operatorname{tr}(M \cdot N)$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E . On note $\| \cdot \|$ la norme associée.
2. Pour tout couple (M, N) d'éléments de E , prouver l'inégalité $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$.
3. Donner une idée de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 34. (CCP PC 2018, Inconnu)

On définit sur $] -\infty, 0[$ la fonction $g : x \mapsto x \exp(1/x) + \exp(x)$.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f : (x, y) \mapsto x \exp(y) + y \exp(x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante et calculer $g(-1)$.
2. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique de g , alors $x_0 < 0$ et $x_0 y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$.
3. Déterminer les points critiques de f .
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto f(-1 + ax, -1 + x)$.
5. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
6. On note $D = [-1, 1]^2$. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D . Déterminer leurs valeurs.

Exercice 35. (CCP PC 2018, Inconnu)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $2p + 1$. Soit f un endomorphisme de E .

1. Soit λ une éventuelle valeur propre de f . Soit x un vecteur propre associé. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $f^n(x)$.

2. Justifier que f possède au moins une valeur propre.

3. On fait l'hypothèse $f^3 - f^2 + f - \text{Id}_E = 0$. Déterminer les valeurs propres de f .

Exercice 36. (CCP PC 2018, Zoé Marmier)

Dire d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *harmonique* signifie qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'elle vérifie l'identité

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

1. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'identité $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y''(t) - 2ty'(t) = 0$ sur $] -1, 1[$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose $F = f \circ g$.

3. Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4. On suppose que f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est harmonique si, et seulement si, la fonction g est constante.

5. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit $G : (x, y) \mapsto h(\cos(x)/\text{ch}(y))$ sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminer les choix de h pour lesquels la fonction G est harmonique.

Exercice 37. (CCP PC 2018, Inconnu)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum_{i=1}^p (u_{2i-1} - u_{2i}) = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k-1} u_k$.

2. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est convergente.

3. Pour tout couple (n, p) d'entiers strictement positifs, prouver l'égalité

$$\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\sqrt{n+2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2k}} \right).$$

Qu'obtient-on en faisant tendre p vers $+\infty$?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n : x \mapsto 1/\sqrt{n+x}$ sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et que g'_n est croissante.

5. À l'aide des accroissements finis, montrer l'inégalité $g_n(2\ell) - g_n(2\ell-1) \leq g_n(2\ell+1) - g_n(2\ell)$.

6. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire la nature de la série $\sum R_n$.

7. Déterminer la nature de la série $\sum |R_n|$.

Exercice 38. (CCP PC 2018, Inconnu)

On considère l'ensemble E des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) traduisant l'appartenance à E.
2. En déduire que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 39. (X-ESPCI PC 2018, Inconnu)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 40. (CCP PC 2018, Inconnu)

On note V l'ensemble des suites complexes $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = v_{n+2} + v_n.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que P possède une unique racine réelle, notée b .
3. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P = (X - b)(X - z)(X - \bar{z})$.
4. On définit de V dans $\mathbb{C}^3$ l'application $\Phi : (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (v_0, v_1, v_2)$.

Montrer que Φ est un isomorphisme. En déduire que V est de dimension finie et préciser sa dimension.

5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de V. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$.

Donner une matrice A vérifiant l'identité $W_{n+1} = A \times W_n$.

6. La matrice A est-elle diagonalisable ? En déduire la forme générale des éléments de V.

Exercice 41. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E. On suppose que u et v commutent. On suppose également que v est nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que v^k soit l'endomorphisme nul de E.

1. Montrer que $u + v$ est bijectif si, et seulement si, l'endomorphisme u est inversible.
2. Montrer l'égalité $\det(u + v) = \det(u)$.

Exercice 42. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \tan(x) \, dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite, notée α .
2. Déterminer un équivalent de $I_n - \alpha$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 43. (CCP PC 2018, Mehdi Chouta)

Dire d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qu'elle est *convexe* signifie qu'elle vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}.$$

On considère une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on définit la suite v de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite u est convexe si, et seulement si, la suite v est croissante.
2. Montrer que la suite de terme général n^2 est convexe.
3. Montrer que les suites u convexes telles que $-u$ soit convexe sont les suites arithmétiques. L'ensemble des suites convexes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
4. On suppose que la suite u est convexe et bornée. Montrer que la suite v est convergente. On note L sa limite.

On suppose que $L > 0$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0} + \frac{L}{2}(n - n_0).$$

En déduire une contradiction. Conclure que L vaut 0.

En déduire enfin que la suite u est monotone puis qu'elle converge.

5. Soit $\alpha \in [2, +\infty[$. On définit la fonction $g : x \mapsto (x+1)^\alpha - x^\alpha$ sur $[0, +\infty[$. On fait l'hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(n) - g(n-1) \geq 2.$$

Montrer que la suite de terme général $\lfloor n^\alpha \rfloor$ est convexe.

Exercice 44. (CCP PC 2018, Mehdi Chouta)

Soit A une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas une valeur propre de A .

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = \frac{I_n + A + \dots + A^p}{p+1}$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, prouver la relation $(I_n - A)A_p = \frac{I_n - A^{p+1}}{p+1}$.
2. Montrer que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 45. (ENS PC 2018, Matthieu Chatelain)

On considère l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = 1/x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Montrer qu'il existe exactement une solution de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 46. (Mines-Télécom PC 2018, Morgane Séverin)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{8^n}{3n+2} x^{2n+1}$.

1. Déterminer son rayon de convergence.

2. On note S la somme de cette série entière. Pour tout $x > 0$, exprimer $\sqrt{x}S((x/2)^{3/2})$ et en déduire une expression de la fonction S à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 47. (Mines-Télécom PC 2018, Morgane Séverin)

Pour toute suite réelle u , on définit la suite réelle $\Phi(u)$ de terme général

$$(\Phi(u))_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Trouver les valeurs propres de Φ et les espaces propres associés.

Exercice 48. (Mines-Ponts PC 2018, Mehdi Chouta)

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles.
2. On pose $B = (A - I_n)(A + I_n)^{-1}$. Montrer que cette matrice est orthogonale.
3. Soit U une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas 1 pour valeur propre. Montrer qu'il existe une matrice C antisymétrique telle que

$$U = (C + I_n)(C - I_n)^{-1}.$$

Exercice 49. (Mines-Ponts PC 2018, Mehdi Chouta)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

1. On considère deux suites réelles positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que u_n est équivalent à v_n quand n tend vers $+\infty$ et que la série $\sum u_n$ est convergente.

Montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Préciser la valeur de sa limite, notée ℓ .
3. Trouver un équivalent simple de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 50. (CCP PC 2018, Emma André)

Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.

1. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, prouver la majoration $\sin(t) \leq t$.
2. Pour tout x réel, justifier l'existence de $F(x)$. Prouver de plus la majoration

$$\forall x > 0, \quad |F(x)| \leq \frac{1 - e^{-\pi/2}}{x}.$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Exprimer la dérivée de F sur $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction F est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

5. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, montrer la minoration $\sin(t) \geq 2t/\pi$.
En déduire que la fonction $x \mapsto xF(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51. (CCP PC 2018, Emma André)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $A \cdot {}^tA \cdot A = I_n$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et que A^{-1} est symétrique.
2. Montrer que la matrice A est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Exercice 52. (CCP PC 2018, Émile Brighi)

Dans ce problème, on étudie les polynômes réels P tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, prouver que $n(n+1)/2$ est un entier. En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ qui ne soit pas dans $\mathbb{Z}[X]$.

2. On pose $H_0 = 1$ et $H_k = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $H_k(X+1) - H_k(X)$.

b. Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $H_k(n)$ et vérifier que ce nombre est entier.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$H_{k+1}(n+1) = \sum_{i=0}^n H_k(i).$$

5. À compléter.

Exercice 53. (CCP PC 2018, Émile Brighi)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Justifier l'existence de ces intégrales et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.
2. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} I_n$.

Exercice 54. (X-EPSCI PC 2018, Bilal Ounejjar)

On considère l'ensemble $E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \chi_A = (X - a_{1,1}) \times \cdots \times (X - a_{n,n})\}$.

1. L'ensemble E_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble E_n est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Est-il ouvert ?
4. Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans E_n .

Exercice 55. (CCP PC 2018, Inconnu)

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Pour tout x réel, montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$.

2. Trouver une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \frac{K}{1+x^2}.$$

3. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puis montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée. En déduire une expression de f .

4. Pour tout $x \geq 0$, prouver l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-xu} du$. Sa valeur est notée $L(x)$.

5. On admet que la fonction L est continue en 0. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Exercice 56. (CCP PC 2018, Inconnu)

On considère le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x - y + z + t = 0$ et $x - y - 2z - t = 0$.

Trouver une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et déterminer la distance du vecteur $u = (1, 0, -1, 0)$ à ce plan.

Exercice 57. (CCP PC 2018, Inconnu)

On note E l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum (x_n)^2$ converge. On note f l'application définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe son premier terme x_0 .

1. En développant $(|a| - |b|)^2$, montrer l'inégalité $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq |ab|$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

4. Étant donné deux éléments $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on pose

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Montrer que la fonction φ est bien définie sur $E \times E$ et que c'est un produit scalaire sur E .

On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

5. Pour tout élément x de E , montrer que la suite $(x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi un élément de E . Cette suite est notée $g(x)$ et on a ainsi défini une application g de E vers E .

6. Montrer que l'application g est lipschitzienne pour la norme $\| \cdot \|$.

Exercice 58. (CCP PC 2018, Inconnu)

On note M la matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la $(n+1)$ -ième ligne et de la $(n+1)$ -ième colonne, qui valent 1.

Montrer que M est diagonalisable puis trouver ses éléments propres.

Exercice 59. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

On considère deux urnes. La première contient deux boules blanches et trois boules noires. La deuxième contient quatre boules blanches et trois boules noires. On choisit l'une des deux urnes au hasard et on réalise une suite de tirages avec remise selon le protocole suivant : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans la première urne ; si elle est noire, on fait le tirage suivant dans la deuxième urne.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule blanche du n -ième tirage est blanche » et on note b_n sa probabilité.

1. Calculer b_1 .
2. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n .
3. Exprimer b_n en fonction de n .

Exercice 60. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}.$$

À l'aide de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, obtenir une expression de u_n .

Exercice 61. (CCP PC 2018, Inconnu)

On considère une fonction f_0 définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit alors une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) \, dt.$$

1. Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
3. On admet la propriété suivante

$$\forall a > 0, \quad \exists K > 0, \quad \forall x \in [-a, a], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}.$$

- a. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer l'égalité $F' - F = f_0$.
- c. En déduire une expression de F à l'aide d'une intégrale.

4. Démontrer la propriété admise au début de la question 3.

Exercice 62. (CCP PC 2018, Inconnu)

On note classiquement $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $S_k = 1 + j^k + j^{2k}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On note Y le reste de la division euclidienne de X par 3.

Que vaut $\mathbb{P}(Y = 0)$? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 63. (CCP PC 2018, Inconnu)

On considère la fonction $f : x \mapsto x \times \sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, montrer la majoration $|f(x)| \leq |x|$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $h(x) = f(x)/x$. Existe-t-il $\alpha > 0$ tel que h soit croissante sur $]0, \alpha]$? On pourra utiliser les suites de termes généraux $x_n = \frac{2}{2n+1}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$.
4. Soit un entier $k \geq 2$. La fonction f est-elle continue en $1/k$? Préciser l'ensemble des points où f est continue.
5. Calculer $\int_{1/2}^1 f(x) \, dx$.

Exercice 64. (CCP PC 2018, Inconnu)

Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels distincts. On pose $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

On définit l'endomorphisme $\Phi : M \mapsto AM - MA$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de Φ .

Exercice 65. (Mines-Ponts PC 2018, Inconnu)

Démontrer l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^x} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$.

Exercice 66. (CCP PC 2018, Inconnu)

On considère l'équation différentielle (E) suivante sur $]0, +\infty[$

$$xy'' + xy' - y = 0.$$

1. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt$ converge mais que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt$ diverge.
3. On pose $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt$. Étudier les variations de la fonction G sur $]0, +\infty[$.
4. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et on définit la fonction $s : x \mapsto xf(x)$.
Montrer que s est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, la fonction f' est solution sur $]0, +\infty[$ d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1, notée (E').

5. Résoudre (E') sur $]0, +\infty[$ puis exprimer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ à l'aide de la fonction G.

Exercice 67. (CCP PC 2018, Inconnu)

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, donné par $(M|N) = \text{tr}(M \cdot N)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} \text{ch}(x) - 1 & 4 \\ -2 & \text{sh}(x) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \text{ch}(x) + 1 & 3 \\ 6 & -\text{sh}(x) \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A|B)$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la distance de A à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 68. (CCP PC 2018, Inconnu)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, prouver l'inégalité $\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$.
2. Que peut-on en déduire quant aux valeurs propres de la matrice A ?

Exercice 69. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit u un endomorphisme de E. On note A la matrice représentation de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Rappeler la définition de la diagonalisabilité d'un endomorphisme et la traduction matricielle de cette définition.
2. On suppose que u est diagonalisable et qu'elle vérifie l'égalité $u^4 = \text{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie.
3. On suppose de plus que la trace de u vaut $n - 2$, où n désigne la dimension de E. Quel renseignement supplémentaire peut-on obtenir ?

Exercice 70. (X-ESPCI PC 2018, Inconnu)

On définit la suite de Fibonacci par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique décomposition $p = \sum_{k=1}^r F_{i_r}$, les indices i_r étant supérieurs ou égaux à 2 et jamais consécutifs.

Exercice 71. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(x) & \sin(2x) \\ \sin(x) & 0 & \sin(2x) \\ \sin(2x) & \sin(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Étudier la diagonalisabilité de cette matrice.

Exercice 72. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère n points $A_1, \dots, A_n$ du plan. Pour tout point M du plan, on pose

$$f(M) = \sum_{i=1}^n MA_i^2.$$

Étudier les éventuels extremums de la fonction f .

Exercice 73. (CCP PC 2018, Zoé Marmier)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice M est de rang 1.
2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
3. Interprétation géométrique.

Exercice 74. (Centrale PC 2018, Romain André)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
3. Obtenir le développement asymptotique $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 75. (CCP PC 2018, Romain André)

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes strictement positifs. On suppose que la série de terme général u_n est convergente et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

On fixe $\alpha > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}$.

1. Dans cette question et la suivante, on prend $u_n = 1/2^n$. Montrer l'existence de R_n et préciser sa valeur.
2. Exprimer v_n et étudier la nature de la série de terme général v_n (et calculer sa somme en cas de convergence).
3. On revient au cas général. Exprimer v_n en fonction de R_n et R_{n-1} .

4. Dans cette question, on prend $\alpha = 1$. Montrer que la série de terme général v_n converge. On fera apparaître $\ln(1 - v_n)$.

5. Dans cette question, on prend $\alpha > 1$. Étudier la nature de la série de terme général v_n .

6. Dans cette question, on prend $\alpha < 1$. Étudier la nature de la série de terme général v_n . On utilisera $\int_{\mathbb{R}_{n-1}}^{\mathbb{R}_n} dt/t^\alpha$.

Exercice 76. (CCP PC 2018, Ariella Liberati)

On considère l'ensemble

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+3)u_{n+1} - u_n\}.$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de S . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Trouver une expression de v_n . En déduire une expression de u_n .

3. Donner une base de S .

Exercice 77. (Mines-Ponts PC 2018, Ariella Liberati)

Prouver l'égalité
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) \, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

En déduire l'égalité
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$

Exercice 78. (Centrale PC 2018, Ariella Liberati)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $x^n + x = 1$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation (E_n) possède exactement une solution. Cette solution est notée u_n .

2. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, avec une limite inférieure ou égale à 1, puis montrer que cette limite vaut 1.

3. Montrer que $1 - u_n$ est équivalent à $\frac{\ln(n)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 79. (Centrale PC 2018, Mehdi Chouta)

Soit w une fonction continue, à valeurs réelles strictement positive et intégrable sur $]0, 1[$. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)w(t) \, dt.$$

1. Montrer que $(\mid)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme P_k soit unitaire et de degré k .

3. Montrer que les polynômes P_k sont scindés, à racines simples.

4. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, montrer l'existence de a_k, b_k, c_k réels tels que $XP_k = a_k P_{k-1} + b_k P_k + c_k P_{k+1}$.

Exercice 80. (CCP PC 2018, Valentin Dalstein)

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. Résoudre l'équation $z^n - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'égalité $M^{3k} = I_3$.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On pose $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Montrer que U est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On définit la matrice W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients $w_{i,j}$ sont donnés par $w_{i,i} = a$, par $w_{i,j} = b$ si $|i - j| = 1$ ou $\{i, j\} = \{1, n\}$, les autres coefficients étant nuls.

En généralisant le raisonnement des questions précédentes, montrer que la matrice W est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Exprimer le déterminant de la matrice W sous forme factorisée.

Exercice 81. (CCP PC 2018, Valentin Dalstein)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(nx)$.

1. Montrer que la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.

2. Calculer sa dérivée et en déduire l'identité $f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)} \right)$.

Remarque du transcripteur. Si on prend θ dans $]0, \pi[$ et qu'on pose

$$g_\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\theta),$$

on obtient un exercice beaucoup moins pénible sur les séries entières, après quoi il n'y a plus qu'à remplacer θ par x à la fin (à peu de choses près).

L'exercice qui est proposé ici en est la version « cruelle ».

Exercice 82. (Mines-Ponts PC 2018, Valentin Dalstein)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un entier p strictement positif tel que u^p soit l'endomorphisme nul de E .

1. Pour tout entier k compris entre 1 et p , montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.

2. Prouver l'égalité $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

3. Quelle est la forme de la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition ?

Exercice 83. (Mines-Ponts PC 2018, Valentin Dalstein)

On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Variations ? Limites en 0 et en $+\infty$? Équivalent en $+\infty$?

Exercice 84. (CCP PC 2018, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que u_n et v_n existent.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer les égalités $v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du$.

En déduire que v_n est équivalent à $\ln(n)/(2\pi)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout x dans $]0, 1/2[$, on pose $f(x) = \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité sur $[0, 1/2]$.

5. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 85. (CCP PC 2018, Inconnu)

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, décomposée en colonnes sous la forme $M = [M_1, M_2, M_3, M_4]$. On pose

$$C = [M_1 + M_3, M_2 + M_4, M_1 - M_3, M_2 - M_4].$$

Montrer l'égalité $\det(C) = 4 \det(M)$.

Exercice 86. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) \right)^n$.

Exercice 87. (Mines-Télécom PC 2018, Inconnu)

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 88. (CCP PC 2018, Inconnu)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(\mid)$ défini par $(P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X$.

1. Montrer que φ est linéaire et en déduire que f_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans le cas $n = 3$, déterminer la matrice canoniquement associée à f_α .
3. On pose maintenant $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$.
 - a. Déterminer le rang de φ .
 - b. Montrer l'égalité $(\text{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.
 - c. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, prouver la majoration $\|g_\alpha(P)\| \leq (1 + 2|\alpha|) \|P\|$.
 - d. Prouver l'existence de $\sup_{P \neq 0} \frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|}$ et calculer sa valeur.

Exercice 89. (CCP PC 2018, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

Étudier son comportement quand n tend vers $+\infty$.