Problème I — Polynômes de Laguerre

Dans cet exercice, on étudie une famille de polynômes orthogonale pour un certain produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on introduit les fonctions

$$\begin{aligned} h_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & L_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t^n}{n!} e^{-t} & t &\mapsto h_n^{(n)}(t) \times e^t. \end{aligned} \quad (1)$$

Question 1. Pour tout entier n , montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \quad (2)$$

existe et qu'elle vaut $n!$.

Question 2. En déduire que pour tout polynôme réel P , la fonction

$$t \mapsto P(t)e^{-t} \quad (3)$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt. \quad (4)$$

Question 3. Montrer que la fonction $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Leibniz, obtenir une expression de la fonction L_n . En déduire que cette fonction est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on note encore L_n le polynôme dont L_n est la fonction associée.

Question 5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a. Écrire le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n . En déduire que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, le nombre $h_n^{(k)}(0)$ est nul.

b. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout entier p compris entre 0 et n , prouver l'égalité

$$(L_n|P) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t) P^{(p)}(t) dt. \quad (5)$$

c. En déduire que la famille $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire introduit plus haut.

Question 6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. À l'aide du polynôme L_n , exprimer le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire la valeur de

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right)^2 e^{-t} dt ; (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (6)$$

Problème II

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ selon la valeur du paramètre α .

Question 7. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$?

Partie I

Dans cette partie, on fixe un élément α de l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$.

On définit sur l'intervalle $[1, +\infty[$ la fonction $\phi : t \mapsto \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \phi(n)$ et $v_n = \int_n^{n+1} \phi(t) dt$.

Question 8. Le but de cette question est de prouver l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \phi(t) dt$.

a. Montrer que cette intégrale a la même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha-1}} du$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}$ est absolument convergente.

c. Conclure à l'aide d'une intégration par parties.

d. Que peut-on en déduire pour la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

Question 9. Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad |\phi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Question 10. Pour tout couple (a, b) d'éléments de $[1, +\infty[$ tels que $a \leq b$, prouver l'inégalité

$$|\phi(b) - \phi(a)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} (b - a).$$

Question 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire la domination $|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

Question 12. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Partie II

Dans cette partie, on prouve que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$.

Question 13. Sans entrer dans le détail, expliquer comment on pourrait prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

Question 14. Quand l'entier n tend vers $+\infty$, montrer qu'on a le développement asymptotique

$$\delta_n = \frac{i\pi}{2} \times \frac{e^{i\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8} \times \frac{e^{i\pi\sqrt{n}}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Question 15. Qu'obtient-on en prenant la partie réelle dans la relation de la question précédente ?

Question 16. Prouver que la suite de terme général $\cos(\pi\sqrt{n})$ est divergente.

Question 17. Conclure.

Partie III

Dans cette partie, on fixe un élément α de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

Le but de cette partie est de prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est divergente. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'elle converge.

On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{k^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 18. Pour tout entier $N \geq 1$, prouver la relation

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N S_n \left(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} \right) + S_N (N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Question 19. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Question 20. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ converge puis conclure.

Problème III

On considère un élément z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On pose $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Question 21. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-z}$.

Question 22. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - z^2}$ et préciser sa valeur.

Question 23. Préciser la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - i}$.