

Chapitre 6 — suites de fonctions

Les espaces de fonctions ne sont pas de dimension finie. Il n'y a donc pas de manière canonique de définir la convergence d'une suite de fonctions. Ce chapitre présente deux modes de convergence.

1 Convergence simple

Suites de fonctions. Convergence simple. Exemples de comportements non satisfaisants.

2 Convergence uniforme

2.1 Définition

Définition. Exemples et contre-exemples.

Remarque : la convergence uniforme implique la convergence simple.

2.2 Théorème de continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Hypothèses :

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I ;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I .

Conclusion : la fonction f est continue sur I .

Traduction topologique : pour la norme infinie, le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est fermé dans l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I .

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

2.3 Passage à la limite sous l'intégrale

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Hypothèses :

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[a, b]$.

Conclusion : la suite de terme général $\int_a^b f_n(t) dt$ converge vers le nombre $\int_a^b f(t) dt$.

Traduction topologique : la forme linéaire $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est continue sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme infinie.

2.4 Théorème de dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient g et h deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Hypothèses :

- Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g sur I .
- Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , la suite de fonctions $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction h sur $[a, b]$.

Conclusions : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est la fonction h .

Variante pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: l'hypothèse de convergence uniforme porte uniquement sur l'ordre de dérivation le plus élevé.