Espaces vectoriels normés — exercices corrigés

Exercice 1. Pour tout polynôme réel P , écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$\|P\| = \sup_{0 \leq x \leq 1/2} |P(x)| \quad \text{et} \quad N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

- a. Prouver que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
- b. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ et vers 1 pour la norme N .
- c. (***) Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X .

Corrigé partiel de l'exercice 1. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\|X^n - 0\| = \frac{1}{2^n}.$$

On observe que ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la norme $\|\cdot\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$N(X^n - 1) = \frac{1}{n}.$$

Ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, si bien que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme 1 pour la norme N .

c. On remarque que la somme des coefficients s'annule encore pour $X^n - X$, mais l'autre somme ne tend pas vers 0 à cause du coefficient a_1 . Il suffit de modifier la deuxième somme pour qu'elle ne tienne plus compte de a_1 . Cependant, pour qu'elle vérifie encore la propriété de séparation, il faut insérer a_0 . Posons donc

$$M(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + |a_0| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

On peut vérifier que M est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout entier $n \geq 2$, on trouve $M(X^n - X) = 1/n$, ce qui donne la convergence souhaitée.

Exercice 2. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

- a. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b. Pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver la majoration $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- c. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, prouver la majoration $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty$.
- d. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un vecteur colonne X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour lequel la majoration précédente est une égalité.

Corrigé de l'exercice 2.

- a. *Corrigé en classe.*

b. Soit (A, B) un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients de la matrice $A \times B$ sont donnés par

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Considérons un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\|AB\| = \sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}|.$$

On a alors

$$\|AB\| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|.$$

Appliquons l'inégalité triangulaire

$$\|AB\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}|.$$

On peut alors permuter les deux symboles de sommation puis mettre en facteur ce qui ne dépend pas du deuxième indice.

$$\|AB\| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right).$$

Chaque somme de la forme $\sum_{j=1}^n |b_{k,j}|$ est majorée par $\|B\|$, ce qui donne

$$\|AB\| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \times \|B\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On considère un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|AX\|_\infty = |(AX)_i|$. On a alors

$$\|AX\|_\infty = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \times |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \times \|X\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty.$$

d. Pour réaliser l'égalité dans le calcul précédent, il suffit de choisir $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et de définir un vecteur X en posant

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i,j} \geq 0 \\ -1 & \text{si } a_{i,j} < 0. \end{cases}$$

Avec ce choix, on obtient $\|A\| = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = (AX)_i$ et $\|X\|_\infty = 1$ donc

$$(AX)_i = \|A\| \times \|X\|_\infty$$

donc $\|A\| \times \|X\|_\infty \leq \|AX\|_\infty$, ce qui donne l'égalité en utilisant l'inégalité de la question précédente.

Exercice 7. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E . On suppose que f préserve le produit scalaire, ce qui signifie que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

On pose $g = f - \text{Id}_E$.

a. Prouver l'égalité $\text{Im}(g) = (\text{Ker}(g))^\perp$.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Pour tout vecteur x de E , montrer que la suite $(p_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

Corrigé de l'exercice 7.

a. Soit $x \in \text{Im}(g)$. Soit $y \in \text{Ker}(g)$. Il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$. L'appartenance de y à $\text{Ker}(g)$ donne l'égalité $f(y) = y$. On a alors

$$(x|y) = (g(z)|y) = (f(z) - z|y) = (f(z)|y) - (z|y) = (f(z)|f(y)) - (z|y) = 0.$$

On a alors prouvé que les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ de E sont orthogonaux entre eux. Ils sont en particulier en somme directe. On connaît d'autre part la formule du rang

$$\dim(\text{Im}(g)) + \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(E).$$

Tout ceci permet de conclure que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires et orthogonaux, ce qui donne l'égalité $\text{Im}(g) = (\text{Ker}(g))^\perp$.

b. Soit $x \in E$. Il existe alors un unique couple (y, z) de $\text{Ker}(g) \times \text{Im}(g)$ tel que $x = y + z$. Le vecteur y est alors le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

On connaît l'égalité $f(y) = y$. On en déduit l'égalité $p_n(y) = y$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Le vecteur z est dans $\text{Im}(g)$ donc il existe w dans E tel que $z = g(w)$, ce qui donne $z = f(w) - w$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un télescopage donne

$$p_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^{k+1}(w) - f^k(w)) = \frac{1}{n} (f^n(w) - w).$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$\|p_n(z)\| \leq \frac{\|f^n(w)\| + \|w\|}{n}.$$

Rappelons que f préserve le produit scalaire. On en déduit que f préserve la norme euclidienne, ce qui donne notamment $\|f^n(w)\| = \|w\|$ puis

$$\|p_n(z)\| \leq \frac{2\|w\|}{n}.$$

La relation $p_n(x) = p_n(y) + p_n(z)$ donne $p_n(z) = p_n(x) - y$ puis

$$\|p_n(x) - y\| \leq \frac{2\|w\|}{n}.$$

On en déduit que $\|p_n(x) - y\|$ tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. En d'autres termes, la suite $(p_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

Exercice 9. Parmi les identités suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B); \quad \text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B); \quad \text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B); \quad \text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

Corrigé de l'exercice 9. La première égalité est fautive. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, prenons $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a alors

$$\text{Int}(A) = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Int}(B) = \emptyset \quad \text{donc} \quad \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = \emptyset \quad \text{mais} \quad \text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

La deuxième égalité est vraie. Rappelons que l'intérieur d'une partie de E est le plus grand ouvert inclus dans cette partie.

L'ensemble $\text{Int}(A \cap B)$ est un ouvert inclus dans $A \cap B$. C'est donc un ouvert contenu dans A et dans B . Il est donc inclus dans $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

Réciproquement, l'ensemble $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ est l'intersection d'un ouvert contenu dans A et d'un ouvert contenu dans B donc c'est un ouvert contenu dans $A \cap B$ donc il est inclus dans $\text{Int}(A \cap B)$.

Par double inclusion, on a prouvé la deuxième égalité.

La troisième égalité est vraie aussi. Rappelons que l'adhérence d'une partie de E est le plus petit fermé contenant cette partie.

L'ensemble $\text{Adh}(A \cup B)$ est un fermé qui contient $A \cup B$. C'est donc un fermé qui contient A et qui contient B . Il contient donc $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$.

Réciproquement, l'ensemble $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ est la réunion d'un fermé qui contient A et d'un fermé qui contient B . C'est donc un fermé qui contient $A \cup B$, si bien qu'il contient $\text{Adh}(A \cup B)$.

Par double inclusion, on a prouvé la troisième égalité.

Enfin, la dernière égalité est fautive. Reprenons les parties $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. On a cette fois

$$\text{Adh}(A) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Adh}(B) = \mathbb{R} \quad \text{donc} \quad \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B) = \mathbb{R} \quad \text{mais} \quad \text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(\emptyset) = \emptyset.$$

Exercice 10. Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Montrer l'égalité $\text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(U))) = \text{Adh}(U)$.

Corrigé de l'exercice 10. L'adhérence de U contient l'ouvert U donc $\text{Int}(\text{Adh}(U))$ contient U . Ainsi, l'ensemble $\text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(U)))$ est un fermé qui contient U , si bien qu'il contient $\text{Adh}(U)$.

Réciproquement, l'ensemble $\text{Int}(\text{Adh}(U))$ est inclus dans le fermé $\text{Adh}(U)$ donc son adhérence est également incluse dans $\text{Adh}(U)$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(U))) = \text{Adh}(U)$.

Exercice 11. Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Corrigé de l'exercice 11. La frontière de U est donnée par

$$\text{Fr}(U) = \text{Adh}(U) \setminus \text{Int}(U).$$

L'ensemble U est ouvert, ce qui donne $\text{Int}(U) = U$ puis $\text{Fr}(U) = \text{Adh}(U) \setminus U$. En particulier, la frontière de U est disjointe¹ de U .

Supposons que la frontière de U ne soit pas d'intérieur vide. Cela signifie qu'il existe au moins un point intérieur à la frontière de U . Considérons un tel point et notons-le a . Il existe alors $r > 0$ tel que la boule $B(a, r)$ soit incluse dans $\text{Fr}(U)$. Cette boule est en particulier disjointe de U .

Le point a est un point adhérent à U donc l'intersection $B(a, r) \cap U$ est non vide : c'est une contradiction.

Cette absurdité montre que la frontière de U est vide.

Exercice 12. Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par U est égal à E .

1. Dans le cas où U est une boule ouverte, sa frontière est la sphère qui borde cette boule. La sphère en question est effectivement disjointe de la boule ouverte.

Corrigé de l'exercice 12. L'ouvert U étant non vide, considérons un élément a de U . L'ensemble U étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans U . Fixons un tel r .

L'ensemble $\text{Vect}(U)$ contient alors la sphère $B(a, r)$ et le vecteur a . Par combinaison linéaire, il contient aussi l'ensemble

$$\{x - a ; x \in B(a, r)\},$$

c'est-à-dire la boule ouverte $B(0_E, r)$. Il contient aussi l'ensemble

$$\{\lambda y ; (\lambda, y) \in \mathbb{R} \times B(0_E, r)\},$$

c'est-à-dire E .

En effet, pour tout vecteur x non nul de E , on peut écrire

$$x = \lambda y \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{\|x\|} \times \frac{r}{2} \in B(0_E, r) \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2\|x\|}{r} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13. On définit de E dans E la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\max(1, \|x\|)}.$$

Montrer que la fonction f est 2-lipschitzienne.

Corrigé de l'exercice 13. Soient x et y deux éléments de E . Le but est d'obtenir l'inégalité

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Premier cas. On fait les hypothèses $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, ce qui donne $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Deuxième cas. On fait les hypothèses $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \geq 1$, ce qui donne $f(x) = x$ et $f(y) = y/\|y\|$. On écrit alors

$$f(x) - f(y) = x - y + \frac{\|y\| - 1}{\|y\|} \times y.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| + |(\|y\| - 1)| = \|x - y\| + (\|y\| - 1).$$

La deuxième inégalité triangulaire donne ensuite $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \geq \|y\| - 1$ puis

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Le cas où $\|x\| \geq 1$ et $\|y\| \leq 1$ se traite pareillement.

Troisième cas. On fait les hypothèses $\|x\| \geq 1$ et $\|y\| \geq 1$, ce qui donne $f(x) = x/\|x\|$ et $f(y) = y/\|y\|$. On écrit alors

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} = \frac{\|y\|x - \|x\|y}{\|x\| \times \|y\|} = \frac{\|y\|(x - y) + (\|y\| - \|x\|)y}{\|x\| \times \|y\|}.$$

On applique alors l'inégalité triangulaire.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\|x - y\|}{\|x\|} + \left| \frac{\|y\| - \|x\|}{\|x\|} \right|.$$

Les inégalités $\|x\| \geq 1$ et $\|y - x\| \geq |\|y\| - \|x\||$ donnent finalement

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Cette inégalité a été obtenue dans tous les cas donc la fonction f est 2-lipschitzienne.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E et on suppose qu'elles convergent. Leurs limites respectives sont notées x et y .

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (x_n, y_n) est liée. Montrer que la famille (x, y) est liée.

Pour cela, on raisonnera par l'absurde et on complétera la famille (x, y) en une base de E .

Corrigé de l'exercice 14. On suppose que la famille (x, y) est libre et on la complète en une base $\mathcal{B} = (x, y, z_3, \dots, z_p)$ de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les coefficients de x_n et de y_n dans cette base

$$x_n = x_n(1)x + x_n(2)y + \sum_{k=3}^p x_n(k)z_k \quad \text{et} \quad y_n = y_n(1)x + y_n(2)y + \sum_{k=3}^p y_n(k)z_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille (x_n, y_n) est liée donc les couples $(x_n(1), x_n(2))$ et $(y_n(1), y_n(2))$ sont proportionnels, ce qui donne

$$x_n(1)y_n(2) - x_n(2)y_n(1) = 0.$$

L'espace vectoriel E est de dimension finie donc la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le vecteur x donne la convergence coordonnée par coordonnée. De même pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et le vecteur y . On obtient en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(2) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(2) = 1.$$

Ainsi, le produit en croix $x_n(1)y_n(2) - x_n(2)y_n(1)$ tend vers 1, ce qui est faux puisqu'il tend vers 0.

Cette contradiction prouve que la famille (x, y) est liée.

Traduction. On a prouvé que l'ensemble des couples liés de vecteurs de E est une partie fermée de l'espace vectoriel $E \times E$.