PC* — mathématiques **jeudi 29 novembre 2018**
Devoir surveillé n^o 3 **durée : 4 heures**

Problème I — Séries trigonométriques

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues et 2π-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout couple (f, g) d'éléments de E, on pose $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions

$$c_n : x \mapsto \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad s_n : x \mapsto \sin(nx).$$

On remarque que les fonctions c_n et s_n sont des éléments de E. On remarque aussi que s_0 est la fonction nulle, si bien qu'on ne la prendra pas en compte dans ce qui suit.

On appelle *série trigonométrique réelle* toute série de fonctions de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_n c_n + b_n s_n)$, les a_n et les b_n étant des constantes réelles.

On note $\mathcal{C}$ la famille $(c_n)_{n\geqslant 1}$ et $\mathcal{S}$ la famille $(s_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}_n$ la famille $(c_0, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ et $\mathcal{T}_n$ le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Les éléments de $\mathcal{F}_n$ sont *les polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.*

Étant donné une fonction f élément de E, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t.$$

Partie 1 — Produit scalaire

Question 1. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto (f|g)$ définie dans le préambule est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

La norme associée à ce produit scalaire est notée $||\ ||$.

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{F}_n$ est orthogonale et en déduire la dimension de $\mathcal{T}_n$.

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in$ E. On note $\mathrm{S}_n(f)$ le projeté orthogonal du vecteur f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_n$.

Prouver l'égalité

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{a_0(f)}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)c_k + b_k(f)s_k).$$

Question 4. Soit $f \in$ E. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'inégalité $||\mathrm{S}_n(f)||^2 \leqslant ||f||^2$.

Question 5. Soit $f \in$ E. Prouver que la série de terme général $a_n(f)^2 + b_n(f)^2$ est convergente.

Question 6. On admet le théorème suivant, dû à Karl Weierstraß : pour toute fonction f de E, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n soit un élément de $\mathcal{T}_n$.

Pour toute fonction f de E, prouver que la suite $(\mathrm{S}_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f pour la norme $||\ ||$.
On commencera par prouver les inégalités $||f - \mathrm{S}_n(f)|| \leqslant ||f - f_n|| \leqslant ||f - f_n||_\infty$.

Question 7. Démontrer la *formule de Parseval* : pour toute fonction f de E, on a l'égalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2}.$$

Question 8. Soient f et g deux éléments de E. On fait l'hypothèse suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = a_n(g), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = b_n(g).$$

Montrer alors que les fonctions f et g sont égales.

Partie 2 — Convergence normale

Question 9. Étant donné deux suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ converge si, et seulement si, les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \beta_n$ convergent absolument.

Dans la suite, on se donne deux suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_n : x \mapsto \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx).$$

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

Question 11. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \beta_n$ convergent absolument.

Question 12. Dans cette question, on suppose que les conditions de la question précédente sont remplies. On peut donc définir sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$g : x \mapsto \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\right).$$

Montrer alors que g est un élément de E et prouver les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = a_n(g), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = b_n(g).$$

Question 13. On considère une fonction f appartenant à E. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n(f)|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} |b_n(f)|$ convergent.

À l'aide du résultat de la question 8, prouver alors l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right).$$

On dit qu'une telle fonction est *égale à la somme de sa série de Fourier.*

Question 14. Dans cette question, on considère une fonction f appartenant à E et on suppose qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les nombres $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f')$ et $b_n(f')$.

b. En déduire les inégalités $|a_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(b_n(f')^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $|b_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a_n(f')^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c. En déduire que la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier.

Partie 3 — Un exemple

On construit une fonction f en posant $f(x) = x(\pi - x)$ si x est dans $[0, \pi]$, puis $f(x) = -f(-x)$ sur x est dans $[-\pi, 0]$, puis en imposant à f d'être 2π-périodique.

Question 15. Expliquer rapidement pourquoi une telle construction est possible.

Question 16. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que $a_n(f)$ est nul.

Question 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $b_n(f) = \dfrac{4(1-(-1)^n)}{\pi} \times \dfrac{1}{n^3}$.

Question 19. En déduire l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Question 20. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Question 21. En appliquant la formule de Parseval, obtenir la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^6}$ et en déduire celle de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^6}$.

Problème II — Opérateurs de translation et de différence

On fixe un entier n supérieur ou égal à 1. On rappelle que la notation $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout polynôme P, on note deg(P) le degré de P. Pour tout polynôme P non nul, on note cd(P) le coefficient dominant de P.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note P_k le polynôme X^k. On note $\mathcal{B}$ la famille $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ et on rappelle que c'est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On rappelle que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f^k l'itérée k-ième de f. Par exemple, la notation f^3 désigne $f \circ f \circ f$.

Si f est un automorphisme de E, la notation f^{-1} désigne sa bijection réciproque et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation f^{-k} désigne à la fois l'itérée k-ième de f^{-1} et la bijection réciproque de f^k.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on note $\tau(\mathrm{P})$ le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ et $\delta(\mathrm{P})$ le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$, de sorte que $\delta = \tau - \mathrm{Id}$.

L'application τ est *l'opérateur de translation* et l'application δ est *l'opérateur de différence*.

Partie 1 — L'opérateur de translation

Question 22. Pour tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, exprimer $\deg(\tau(\mathrm{P}))$ en fonction de deg(P) et exprimer $\mathrm{cd}(\tau(\mathrm{P}))$ en fonction de cd(P).

Question 23. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression du polynôme $\tau^k(\mathrm{P})$.

Question 24. Montrer que τ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et exprimer sa réciproque τ^{-1}.

Question 25. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression du polynôme $\tau^{-k}(\mathrm{P})$.

Question 26. On note M la matrice de τ dans la base $\mathcal{B}$. Ses coefficients sont notés $(\mathrm{M}_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Les indices sont numérotés à partir de 0 par souci de cohérence avec les termes de la base $\mathcal{B}$.

Exprimer les coefficients $\mathrm{M}_{i,j}$.

Question 27. Les coefficients de la matrice M^{-1} sont notés $((\mathrm{M}^{-1})_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Exprimer $(\mathrm{M}^{-1})_{i,j}$.

Question 28. On considère une suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j.$$

Trouver une matrice Q de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{Q} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Question 29. En déduire la formule d'inversion

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

Partie 2 — L'opérateur de différence

Question 30. Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Exprimer $\deg(\delta(\mathrm{P}))$ et $\mathrm{cd}(\delta(\mathrm{P}))$ en fonction de $\deg(\mathrm{P})$ et de $\mathrm{cd}(\mathrm{P})$.

Question 31. En déduire le noyau et l'image de δ.

Question 32. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, prouver les égalités $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]$.

Question 33. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stable par δ. On suppose que F n'est pas réduit à $\{0\}$. On considère alors un élément de P non nul de F de degré maximal, noté d.

a. On note $\mathcal{F}$ la famille $(\mathrm{P}, \delta(\mathrm{P}), \ldots, \delta^d(\mathrm{P}))$. Montrer que cette famille est libre.

b. Quel est l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$?

c. Prouver l'égalité $\mathrm{F} = \mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

Question 34. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On fait l'hypothèse $u \circ u = \delta$.

a. Montrer que u et δ commutent.

b. En déduire que $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ est stable par u.

c. On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ induit par u et on note A sa matrice relativement à la base $(1, \mathrm{X})$ de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Que vaut la matrice A^2 ?

d. Obtenir une contradiction.

e. Que peut-on en déduire ?