Exercice 1. **Intégrales de Wallis**

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

a. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à termes strictement positifs.

b. En partant de l'écriture

$$\mathrm{W}_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)\ \mathrm{d}t$$

et en effectuant une intégration par parties, obtenir l'identité $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$.

c. Montrer que la suite de terme général $(n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1}$ est constante et déterminer sa valeur.

d. Partant de l'encadrement $\mathrm{W}_{n+2} \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n$, montrer que $\dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

e. En déduire un équivalent simple de W_n quand n tend vers $+\infty$.

f. Obtenir une expression de W_{2p} avec des factorielles.

Exercice 2. **Calcul d'une somme de série**

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\ \mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\ \mathrm{d}t$.

a. Justifier l'égalité $\mathrm{I}_n = \mathrm{W}_{2n}$. En déduire une relation entre I_n et I_{n+1}.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\mathrm{I}_n = n\left((2n-1)\mathrm{J}_{n-1} - 2n\mathrm{J}_n\right)$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Q}_n = \mathrm{J}_n/\mathrm{I}_n$. Prouver la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{Q}_{n-1} - \mathrm{Q}_n = \frac{1}{2n^2}.$$

d. Pour tout x dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, prouver l'inégalité $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

e. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver les inégalités

$$\mathrm{J}_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}) \leqslant \frac{\pi^2}{4} \times \frac{\mathrm{I}_n}{2n+2}.$$

Qu'en déduit-on pour la suite $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

f. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3. Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. On suppose que f possède une limite finie, notée ℓ, en $+\infty$.

a. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que la suite $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Trouver un exemple où la fonction f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

c. Trouver un exemple de fonction g dérivable sur $[0, +\infty[$, à valeurs complexes, qui admet une limite nulle en $+\infty$, telle que la fonction $|g'|$ tende vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 4. Trouver la partie entière de $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 5. **Quelques études de séries**

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que l'un au moins des trois nombres $\cos^2(n-1)$, $\cos^2(n)$ et $\cos^2(n+1)$ est supérieur ou égal à $1/2$.

Indication. On pourra utiliser l'encadrement $\frac{\pi}{4} \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, et s'aider d'un dessin.

En déduire que la série de terme général $\frac{\cos^2(n)}{n}$ est divergente. Pour cela, on minorera les sommes partielles ayant un nombre de termes de la forme 3N.

2. On se propose maintenant de montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \cos(n)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité $\mathrm{S}_n = \dfrac{\cos(\frac{n+1}{2})\ \sin(\frac{n}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$, puis la majoration $|\mathrm{S}_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{2})}$.

b. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{S_N}}{\sqrt{\mathrm{N}+1}} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{S}_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

c. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{S}_n \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ converge absolument.

d. Conclure.

3. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}$.

Exercice 6. **Règle de la loupe**

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante à termes positifs. On pose $v_p = 2^p u_{2^p}$. Prouver que les séries

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{p \geqslant 0} v_p$$

ont la même nature. Pour cela, on commencera par démontrer l'encadrement

$$\frac{1}{2} v_{p+1} \leqslant \sum_{n=2^p}^{2^{p+1}-1} u_n \leqslant v_p$$

puis on manipulera les sommes partielles des deux séries.

b. Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

Exercice 7. Soit P un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples. On note n le degré de n et pour tout t réel, on pose

$$\mathrm{Q}_t = \mathrm{P} + t\mathrm{X}^{n+1}.$$

Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout t dans $]0, \varepsilon]$, le polynôme Q_t soit scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples.

Priorités. On traitera en priorité les exercices 1 et 2. L'exercice 4 peut être un complément sympathique. Les ambitieux sont fortement invités à fréquenter les exercices 3 et 6. La partie 2 de l'exercice 5 ne manque pas d'intérêt car c'est un cas particulier d'une technique de calcul hors programme mais utile : la transformation d'Abel, analogue de l'intégration par parties dans l'univers des sommes finies. L'exercice 7 est à réserver aux gens qui ont résolu tout le reste.
