Exercice 1. **(*)** Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

2. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E telles que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

3. Dénombrer les partitions de E en deux sous-ensembles.

4. Plus généralement, exprimer le nombre de partitions de E en p sous-ensembles en fonction de $\mathrm{S}(n, p)$, qui est le nombre de surjections de E vers $[\![1, p]\!]$ (on ne cherchera pas à exprimer $\mathrm{S}(n, p)$).

Exercice 2. **(*)** Jean-Pignon doit descendre un escalier de n marches. Selon l'inspiration du moment, il franchit une ou deux marches à la fois. Une *descente* de cet escalier peut ainsi être modélisée par une suite finie d'entiers égaux à 1 ou 2 dont la somme vaut n. Le nombre de descentes d'un escalier de n marches est noté d_n. Par convention, on décide que d_0 vaut 1 (l'unique descente d'un escalier vide s'effectue en ne faisant rien).

Voici toutes les descentes d'un escalier à 4 marches

$$(1,1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(2,2).$$

On voit que d_4 vaut 5.

1. Calculer d_1, d_2, d_3.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Montrer l'égalité

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}.$$

Pour cela, on partitionnera l'ensemble des descentes d'un escalier de n marches selon la longueur du dernier pas.

3. Vérifier que cette relation de récurrence est encore valable pour $n = 2$. Obtenir ensuite une expression de d_n en fonction de n à l'aide des nombres

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

4. Soit n un entier strictement positif. En partitionnant l'ensemble des descentes d'un escalier de n marches selon le nombre de pas de deux marches, obtenir l'expression

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Vérifier que cette expression est encore valable pour $n = 0$.

5. Écrire une fonction en Python qui renvoie la valeur de d_n. Cette fonction s'appuiera sur la formule de récurrence.

Exercice 3. **(**)** Dénombrer les surjections d'un ensemble de cardinal $(n+1)$ sur un ensemble de cardinal n.

Pour cela, on commencera par remarquer que pour une telle application, il y a exactement un élément de l'ensemble de l'arrivée qui possède exactement deux antécédents.

Exercice 4. **(**)** Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $\mathbb{N}$.

On note E l'ensemble des p-uplets croissants d'éléments de $[\![0, n]\!]$ et F l'ensemble des p-uplets strictement croissants d'éléments de $[\![1, n+p]\!]$.

a. Montrer que l'application

$$\varphi : (a_1, \ldots, a_p) \mapsto (a_1 + 1, a_2 + 2, \ldots, a_p + p)$$

est une bijection de E sur F.

b. En déduire le cardinal de l'ensemble E.

c. On note G l'ensemble des $(p+1)$-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut n. Trouver une bijection entre G et E.
