

Corrigé du devoir en temps libre n° 9

Exercice 1.**I.a.** Cette équation différentielle s'écrit sous la forme

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

en prenant $a(x) = 0$ et $b(x) = x$. Les fonctions a et b sont continues sur $\mathbb{R}$.Le théorème de Cauchy linéaire permet d'affirmer que pour tout (α, β) dans $\mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.On répond à la question en évoquant les cas $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(\alpha, \beta) = (0, 1)$.**I.b.** La fonction y est développable en série entière sur $] -R, R[$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -R, R[, \quad y''(x) - xy(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}}_{k=n+3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{k=3}^{+\infty} a_{k-3} x^{k-2} \\ &= a_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (n(n-1)a_n - a_{n-3}) x^{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité du développement en série entière, une condition nécessaire et suffisante pour que y soit solution de (E_1) est que ses coefficients vérifient l'égalité $u_2 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 3, \quad a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)}.$$

I.c. Analyse. On suppose que la fonction y est solution de (1) sur $] -R, R[$. En itérant la relation de récurrence, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u_{3p} &= \frac{u_0}{3p(3p-1)(3p-3)(3p-4)\dots 3.2} \\ u_{3p+1} &= \frac{u_1}{(3p+1)(3p)(3p-2)(3p-3)\dots 4.3} \\ u_{3p+2} &= 0. \end{cases}$$

Synthèse. Pour tout entier n , posons

$$a_n = \frac{1}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots 3.2} = \frac{1}{9^n n! \alpha_n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\dots 4.3} = \frac{1}{9^n n! \beta_n}.$$

Pour tout x réel, posons ensuite

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{3n} \quad \text{et} \quad b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{3n+1}.$$

Vérifions que ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Soit $x > 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, les coefficients a_n et b_n sont non nuls et on trouve

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{3(n+1)}}{a_n x^{3n}} \right| = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)} \quad \text{et} \quad \left| \frac{b_{n+1} x^{3(n+1)+1}}{b_n x^{3n+1}} \right| = \frac{|x|^3}{(3n+4)(3n+3)}.$$

Ces deux quotients tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui est strictement inférieur à 1. Le critère de d'Alembert nous enseigne donc que les séries $\sum a_n x^{3n}$ et $\sum b_n x^{3n+1}$ convergent absolument.Ainsi, les fonctions a et b sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

Les conditions nécessaires et suffisantes de la question précédente étant vérifiées, les fonctions a et b sont des solutions de (E_1) .

On observe de plus les conditions initiales $(a(0), a'(0)) = (1, 0)$ et $(b(0), b'(0)) = (0, 1)$, si bien que a est la fonction A et b est la fonction B.

On a donc montré que A et B sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Au fait, pourquoi ai-je parachuté les fonctions A et B directement sous cette forme ? En d'autres termes, comment les ai-je trouvées ?

Souvenons-nous que la formule de Taylor donne, pour la fonction y de la question précédente, les égalités $y(0) = u_0$ et $y'(0) = u_1$.

J'ai donc simplement choisi les valeurs de u_0 et u_1 de manière à ce que la fonction y soit solution du problème de Cauchy à résoudre.

I.d. On sait que l'application $y \mapsto (y(0), y'(0))$ est un isomorphisme de Δ sur $\mathbb{R}^2$. Cet isomorphisme envoie (A, B) sur la base canonique de $\mathbb{R}^2$ donc (A, B) est une base de Δ . On en déduit en particulier que tous les éléments de Δ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

II.1. C'est un bien bel exercice de calcul que voilà ! De mon point de vue, c'est plutôt un exercice pénible de $\text{\LaTeX}$, que je décide de zapper.

II.2.a. Notons $W = Z'Y - Y'Z$. Pour tout $t < 0$, on obtient

$$W'(t) = Z''(t)Y(t) + Z'(t)Y'(t) - Y'(t)Z'(t) - Y''(t)Z(t) = \left(t + \frac{5}{16t^2}\right) Z(t)Y(t) - tY(t)Z(t) = \frac{5}{16t^2} Y(t)Z(t).$$

En intégrant cette identité entre x_0 et x_1 , on obtient l'égalité souhaitée.

II.2.b. Comme x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de Z , par continuité, la fonction Z garde un signe constant sur l'intervalle $[x_0, x_1]$. La fonction $t \mapsto \frac{Y(t)Z(t)}{t^2}$ a alors le même signe constant sur cet intervalle.

Par positivité de l'intégrale, d'après l'inégalité $x_0 < x_1$, la quantité $[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x)]_{x_0}^{x_1}$ est également de ce signe.

II.2.c. Comme Z s'annule en x_0 et x_1 , on trouve $[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x)]_{x_0}^{x_1} = Z'(x_1)Y(x_1) - Z'(x_0)Y(x_0)$.

Sans perte de généralité, supposons que Z est positive sur $[x_0, x_1]$. Déterminons le signe des nombres $Z'(x_0)$ et $Z'(x_1)$.

Pour tout $x \in]x_0, x_1[$, on remarque les inégalités $\frac{Z(x) - Z(x_0)}{x - x_0} = \frac{Z(x)}{x - x_0} \geq 0$ et $\frac{Z(x_1) - Z(x)}{x_1 - x} \leq 0$.

En faisant tendre x vers x_0 dans le premier cas et vers x_1 dans le deuxième cas, on obtient les inégalités

$$Z'(x_0) \geq 0 \quad \text{et} \quad Z'(x_1) \leq 0.$$

Comme $Y(x_0)$ et $Y(x_1)$ sont positifs, on obtient $[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x)]_{x_0}^{x_1} \leq 0$. D'après **II.2.b**, toutefois, ce nombre est de même signe que Z , donc il est positif. Il est donc nul, ce qui est impossible car $\int_{x_0}^{x_1} \frac{Y(t)Z(t)}{t^2} dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle.

On a alors montré par l'absurde qu'il est impossible que Y reste strictement positive sur $]x_0, x_1[$. De la même façon (en remplaçant Y par $-Y$), il est impossible que Y reste strictement négative sur $]x_0, x_1[$. Par conséquent, Y prend au moins une valeur positive et une valeur négative dans cet intervalle. Comme la fonction Y est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que Y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]x_0, x_1[$.

Remarquons maintenant que pour tout k dans $\mathbb{N}$, le nombre $x_k = -(\frac{3\pi}{4} + k\frac{3\pi}{2})^{2/3}$ est un zéro de Z et que Z n'a pas d'autre zéros que ces nombres dans $] -\infty, 0[$.

Le raisonnement qui précède montre que pour tout entier k , la fonction Y possède au moins un zéro dans $]x_{k+1}, x_k[$. Ça lui fait une infinité de zéros dans $] -\infty, 0[$.

III.1.a. Les coefficients des développements en série entières de A et B sont positifs. Pour tout $x \geq 0$, on en déduit les minoration

$$A(x) \geq 1 + \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad B(x) \geq x.$$

On en déduit que les fonctions A et B tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, si bien qu'elles ne sont pas bornées sur $[0, +\infty[$.

III.1.b. On en déduit que le sous-espace des solutions de (E_1) bornées sur $[0, +\infty[$ est inclus strictement dans l'espace des solutions, si bien qu'il est de dimension au plus 1, l'espace des solutions étant de dimension 2.

III.2. Encore un sympathique exercice de calcul que je sacrifie sur l'autel de ma paresse.

III.3.a. Pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, posons $h(x, t) = \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3)$.

Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, avec

$$\forall t \geq 1, \quad |h(x, t)| \leq e^{-\sqrt{x}t^2} \leq e^{-\sqrt{x}t}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{x}t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que $t \mapsto h(x, t)$ l'est aussi, si bien qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

1 Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ comme on l'a vu à la question précédente.

2 Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3).$$

3 Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

4 Fixons un segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. Pour tout (x, t) dans $[a, b] \times [0, +\infty[$, on remarque la majoration

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \underbrace{\frac{t^2}{2\sqrt{a}} \exp(-\sqrt{a}t^2)}_{\text{noté } g(t)}.$$

La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$, qui est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On en déduit que g l'est aussi, puis que g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale permet alors d'affirmer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall x > 0, \quad I'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3) dt.$$

III.3.c. Dans l'expression obtenue pour $I'(x)$, notons que $t \mapsto t^2 \cos(t^3/3)$ se primitive en $t \mapsto \sin(t^3/3)$ et que $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2)$ se dérive en $t \mapsto -t \exp(-\sqrt{x}t^2)$. Effectuons donc une intégration par parties, en intégrant dans un premier temps sur un segment $[0, M]$.

$$- \int_0^M \frac{t^2}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3) dt = - \left[\exp(-\sqrt{x}t^2) \sin(t^3/3) \right]_{t=0}^{t=M} - \int_0^M t \exp(-\sqrt{x}t^2) \sin(t^3/3) dt.$$

Le terme tout intégré vaut $\exp(-\sqrt{x}M^2) \sin(M^3/3)$. Sa valeur absolue est majorée par $\exp(-\sqrt{x}M^2)$, donc ce terme tend vers 0 quand M tend vers $+\infty$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient donc l'égalité attendue (et l'on démontre au passage que l'intégrale souhaitée est convergente).

III.3.d. On applique de nouveau le théorème de dérivation sous l'intégrale pour montrer que I' est également de classe $\mathcal{C}^1$. Cette fois, on l'applique à la fonction $H : (x, t) \mapsto -t \exp(-\sqrt{x}t^2) \sin(t^3/3)$, et l'on utilise la domination

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \right| \leq \underbrace{\frac{t^3}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2)}_{\text{noté } G(t)},$$

la fonction G étant intégrable sur $[0, +\infty[$ par le même argument que pour g .

On obtient donc que I est de classe $\mathcal{C}^2$, avec

$$\forall x > 0, \quad I''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) \sin(t^3/3) dt.$$

Là encore, intégrons par parties, en remarquant que $t \mapsto t^2 \sin(t^3/3)$ se primitive en $t \mapsto -\cos(t^3/3)$ et que $t \mapsto \frac{t}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2)$ se dérive en $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) - t^2 \exp(\sqrt{x}t^2)$. Soit $M > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{t^3}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) \sin(t^3/3) dt &= \left[-\cos(t^3/3) \frac{t}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}t^2) \right]_0^M + \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^M \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3) dt \\ &\quad - \int_0^M t^2 \exp(-\sqrt{x}t^2) \cos(t^3/3) dt. \end{aligned}$$

Le terme tout intégré vaut $-\cos(M^3/3) \frac{M}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x}M^2)$. Là encore, il tend vers 0 quand M tend vers $+\infty$.

Faisons tendre M vers $+\infty$ dans l'identité obtenue ci-dessus. Il reste $I''(x) = 2\sqrt{x}I'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}I(x)$, ce qui montre que la fonction I est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_2) .

III.4.a. Par le même calcul qu'en **III.2**, on obtient

$$\forall x > 0, \quad y''(x) - xy(x) = \left(I''(x) - 2\sqrt{x}I'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}I(x) \right) \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = 0,$$

si bien que y est une solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

III.4.b. Soit $x > 0$. On remarque la majoration suivante

$$|I(x)| \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}t^2} dt}_{\text{posons } u=\sqrt{x}t} = x^{-1/4} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du}_{\text{noté } \mu}.$$

On en déduit la majoration $|y(x)| \leq \mu x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$, qui montre que y tend vers 0 en $+\infty$.

Comme y tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A > 0$ vérifiant la majoration

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad |y(x)| \leq 1.$$

Rappelons que le problème de Cauchy défini par l'équation (E_1) et les conditions initiales $u(A) = y(A)$ et $u'(A) = y'(A)$ possède une unique solution u définie sur $\mathbb{R}$. Comme y est l'unique solution de ce problème de Cauchy sur $]0, +\infty[$, ces deux fonctions coïncident sur $]0, +\infty[$. En particulier, la fonction y se prolonge par continuité en 0, ce qui montre qu'elle est bornée sur $]0, A]$.

Par conséquent, la fonction y est une solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$ non nulle et bornée. L'espace vectoriel mentionné à la question **III.1.b** est donc de dimension au moins 1. Il est finalement de dimension 1.

III.5.a. Par récurrence avec une intégration par parties.

III.5.b. Première méthode. Pour tout u réel, on remarque l'égalité $1 - \cos(u) = 2 \sin^2(u/2)$.

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin'(t)| = |\cos(t)| \leq 1.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit la majoration

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin(t) - \sin(0)| \leq |t|, \quad \text{donc} \quad |\sin(t)| \leq |t| \quad \text{puis} \quad \sin^2(t) \leq t^2.$$

On obtient donc en particulier $1 - \cos(u) \leq 2(u/2)^2 = u^2/2$.

Deuxième méthode. Soit $u \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 donne

$$\cos(u) = \cos(0) + \cos'(0)u + \int_0^u \cos''(s)(u-s) \, ds = 1 - \int_0^u \cos(s)(u-s) \, ds.$$

Prenons $u \geq 0$. On obtient alors

$$1 - \cos(u) = \int_0^u \cos(s)(u-s) \, ds \leq \int_0^u (u-s) \, ds = \frac{u^2}{2}.$$

Par parité, cette inégalité est encore valable si u est négatif.

III.5.c. Soit $x > 0$. On en déduit la majoration suivante

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}t^2} |\cos(t^3/3) - 1| \, dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}t^2} \frac{t^6}{18} \, dt = \frac{x^{-7/4}}{18} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^6 \, du = \frac{x^{-7/4}}{18} \frac{6!}{2^7 3!} \sqrt{\pi},$$

où l'on a effectué à nouveau le changement de variable $u = x^{1/4}t$.

Le même changement de variable donne

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2) \, dt = x^{-1/4} \int_0^{+\infty} \exp(u^2) \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^{-1/4}.$$

Ainsi, la majoration ci-dessus entraîne la relation $I(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^{-1/4} = \mathcal{O}(x^{-7/4})$. Cette dernière quantité étant négligeable devant $x^{-1/4}$ quand x tend vers $+\infty$, un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est $\frac{\sqrt{\pi}}{2} x^{-1/4}$.

Exercice 2. a. Introduisons la fonction $f : u \mapsto \ln(u + \sqrt{1+u^2})$. Notons tout d'abord que pour tout u réel, on a

$$1 + u^2 > u^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{1+u^2} > |u| \geq -u \quad \text{donc} \quad u + \sqrt{1+u^2} > 0.$$

On en déduit que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ et un calcul que je ne détaille pas donne

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Soit $x > 0$. Calculons $K(x)$. Effectuons le changement de variable $u = \sin(t)$.

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{x^2 + (1-x^2)\sin^2(t)}} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + (1-x^2)u^2}} \, du.$$

Prenons plus précisément x dans $]0, 1[$, de sorte que $1 - x^2$ soit strictement positif.

$$K(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)u^2}} \, du = \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}u\right) \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

En réarrangeant les termes, il reste $K(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right) = \frac{\ln(\sqrt{1-x^2}+1) - \ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Par parité de la fonction K , on obtient $K(x) = \frac{\ln(\sqrt{1-x^2}+1) - \ln(|x|)}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout x dans $] -1, 0[\cup]0, 1[$.

Je ne détaille pas le calcul pour les autres valeurs de x car le but est de faire tendre x vers 0.

b. Pour tout (x, t) dans $\mathbb{R} \times]0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}}$.

[1] Pour tout t dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

[2] Pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

[3] Pour tout (x, t) dans $\mathbb{R} \times]0, \frac{\pi}{2}]$, on observe la domination $|f(x, t)| \leq \frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)}$.

Or la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)} = \frac{2 \sin^2(t/2)}{\sin(t)} = \tan(t/2)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et tend vers 0 en 0, si bien qu'elle est intégrable sur cet intervalle (intégrale faussement impropre).

On a alors vérifié toutes les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale. La fonction $x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

c. On en déduit la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (J(x) - K(x)) = I(0) = \int_0^{\pi/2} \tan(t/2) dt = [-2 \ln(\cos(t/2))]_0^{\pi/2} = -2 \ln(1/\sqrt{2}) = \ln(2).$$

On en déduit la relation $J(x) = K(x) + \ln(2) + o_{x \rightarrow 0}(1)$.

Remarquons maintenant le développement limité $\ln(\sqrt{1 - x^2} + 1) = \ln(2) + o_{x \rightarrow 0}(1)$, qui donne finalement

$$J(x) = -\ln(|x|) + 2 \ln(2) + o_{x \rightarrow 0^+}(1).$$

Exercice 3. 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. La sous-additivité donne

$$0 \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

La suite des restes d'une série convergente tend vers 0 donc, par encadrement, la suite $\left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

La suite d'événements $\left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion donc la continuité décroissante donne

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right) = 0,$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(A) = 0$.

2.a. C'est juste une étude de fonction, mais on peut aussi écrire

$$1 - e^{-x} = \int_0^x e^{-t} dt \leq \int_0^x 1 dt = x.$$

2.b. Les A_n sont mutuellement indépendants donc les $\overline{A_n}$ le sont aussi. On exploite leur indépendance puis on utilise la majoration de la question précédente

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{r \geq n \geq p} \overline{A_n} \right) = \prod_{r \geq n \geq p} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \prod_{r \geq n \geq p} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \prod_{r \geq n \geq p} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \exp \left(- \sum_{r \geq n \geq p} \mathbb{P}(A_n) \right).$$

2.c. La suite $\left(\bigcap_{r \geq n \geq p} \overline{A_n}\right)_{r \geq p}$ est décroissante pour l'inclusion et l'intersection de tous ses termes est l'événement I_p . La continuité décroissante donne donc

$$\mathbb{P}(I_p) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r \geq n \geq p} \overline{A_n}\right).$$

La série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente, à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. On en déduit que l'exponentielle dans la majoration de la question 2.b tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

Cet encadrement donne donc $\mathbb{P}(I_p) = 0$ par passage à la limite.

2.d. La réunion de tous les I_p est l'événement $\overline{A}$. La sous-additivité donne

$$0 \leq \mathbb{P}(\overline{A}) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(I_p) = 0$$

donc $\overline{A}$ est de probabilité nulle. Finalement, l'événement A est de probabilité 1.

Problème IV

1.a. L'égalité $f'' = -\varphi \times f$ prouve que f'' est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout x dans $[0, +\infty[$, on trouve

$$|f''(x)| = |\varphi(x)f(x)| \leq \|f\|_{\infty} \times |\varphi(x)|.$$

La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc la fonction f'' l'est aussi d'après le critère de domination.

1.b. Soit x dans $[0, +\infty[$. Le théorème fondamental de l'intégration donne

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) \, dt.$$

On en déduit que la fonction f' possède en $+\infty$ la limite finie

$$\ell = f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t) \, dt.$$

Supposons que cette limite soit strictement positive. Il existe alors $x_0 > 0$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \quad f'(x) \geq \frac{\ell}{2}.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq f(x_0) + \frac{\ell}{2}(x - x_0)$$

si bien que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. C'est faux puisque la fonction f est bornée.

Cette absurdité prouve que ℓ est négatif. Le même raisonnement appliqué à $-f$ prouve que $-\ell$ est négatif aussi. On en déduit que la limite ℓ est nulle.

2.a. La dérivation donne

$$W' = f'g' + fg'' - f'g' - f''g = -fg\varphi + f\varphi g = 0.$$

La fonction W est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

2.b. Comme on l'a vu dans la partie 1, les fonctions f' et g' ont une limite nulle en $+\infty$. Les fonctions f et g étant bornée, la fonction $W = fg' - f'g$ a une limite nulle en $+\infty$. Cette fonction étant constante, sa limite en $+\infty$ est la valeur de cette constante.

La fonction W est donc la fonction nulle.

Rappelons que la fonction $\psi : y \mapsto (y(0), y'(0))$, définie de l'espace des solutions de (E) vers $\mathbb{R}^2$, est un isomorphisme. L'égalité $W(0) = 0$ prouve que $\psi(f)$ et $\psi(g)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ colinéaires entre eux. Les fonctions f et g sont donc colinéaires aussi.

3. Les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \varphi(x)$ sont continues donc le théorème de Cauchy linéaire nous apprend que l'espace vectoriel des solutions de (E) est de dimension 2. On vient de voir que le sous-espace des solutions de (E) bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est de dimension au plus 1.

Il existe donc des solutions non bornées.
