PC* — mathématiques **jeudi 15 mars 2018**
Corrigé du devoir en temps libre nº 10

Corrigé du devoir en temps libre nº 10

Problème I

Question 1. Soit $x \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. En tant que fonction continue sur un segment, la fonction x est bornée. Notons

$$\mathrm{M} = \sup_{x\in[a,b]} |x(t)|\,.$$

On obtient alors la domination

$$\forall t \in [a,b], \qquad |x(t)w(t)| \leqslant \mathrm{M}\,|w(t)|\,.$$

Comme la fonction w est intégrable sur l'intervalle $]a,b[$, cette domination prouve que la fonction $t \mapsto x(t)w(t)$ est également intégrable sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_a^b x(t)w(t)\ \mathrm{d}t \text{ est donc absolument convergente.}}$$

Question 2. Déjà la fonction $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto (\mathrm{P}|\mathrm{Q})$ est à valeurs réelles.
La bilinéarité et le caractère symétrique s'obtiennent en une ligne (que je n'écris pas) à chaque fois.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On trouve alors

$$(\mathrm{P}|\mathrm{P}) = \int_a^b (\mathrm{P}(t))^2 w(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$$

car la fonction $\mathrm{P}^2 w$ est continue sur l'intervalle $]a,b[$.

Le caractère positif est démontré.

Supposons maintenant de plus que $(\mathrm{P}|\mathrm{P})$ est nul. Alors, la fonction $\mathrm{P}^2 w$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $]a,b[$, donc elle est identiquement nulle sur $]a,b[$.
Comme la fonction w ne s'annule en aucun point de $]a,b[$, la fonction P s'annule en tout point de $]a,b[$. Cela donne une infinité de racines au polynôme P. Ce polynôme est donc nul.

Le caractère défini positif est démontré.

$$\boxed{\text{La fonction } (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto (\mathrm{P}|\mathrm{Q}) \text{ est donc un produit scalaire sur } \mathbb{R}[\mathrm{X}].}$$

Question 3. On applique le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(\mathrm{X}^k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour cela, on pose $\mathrm{P}_0 = 1$ pour, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n le vecteur obtenu en retirant à X^n son projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, ce qui est donné par

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{P}_k|\mathrm{X}^n)}{(\mathrm{P}_k|\mathrm{P}_k)}\mathrm{P}_k.$$

Le polynôme P_n est construit en ajoutant à X^n un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc son monôme de plus haut degré est X^n.
De plus, la construction de P_n en fait le projeté orthogonal de X^n sur l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, si bien que P_n est dans cet orthogonal.

$$\boxed{\text{Cette construction remplit les conditions 1 et 2 de l'énoncé.}}$$

Réciproquement, considérons une suite $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant ces conditions.

D'après la condition 1, le polynôme Q_0 est unitaire, de degré 0, donc c'est le polynôme constant égal à 1.
L'égalité $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{P}_0$ est vraie.

Prenons maintenant un entier n supérieur ou égal à 1.
D'après la condition 1, le polynôme Q_n est de la forme $\mathrm{X}^n - \mathrm{R}_n$ pour un certain polynôme R_n de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. D'après la condition 2, le polynôme $\mathrm{X}^n - \mathrm{R}_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, si bien que R_n est le projeté orthogonal de X^n sur le sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Cela prouve l'égalité $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n$.

Les suites $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc égales.

$\boxed{\text{Les conditions 1 et 2 caractérisent une unique suite de polynômes.}}$

Question 4. Les polynômes P_n et XP_{n-1} admettent tout deux le même monôme de plus haut degré, à savoir X^n, si bien que leur différence est de degré au plus $n-1$.

Soit maintenant $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-3}[\mathrm{X}]$. Le polynôme P_n est orthogonal à Q d'après la condition 2. Il reste

$$(\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1}|\mathrm{Q}) = -(\mathrm{XP}_{n-1}|\mathrm{Q}) = -\int_a^b t\mathrm{P}_{n-1}(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t = -(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{XQ}) = 0$$

car XQ est dans $\mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}]$ et P_{n-1} est dans $(\mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}])^{\perp}$.

Remarquons que la famille $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n-1})$ est une famille orthogonale de polynômes non nuls donc elle est libre. C'est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ car cet espace est de dimension n.
C'est plus précisément une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(\mathrm{P}_k|\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_k|\mathrm{P}_k)}}_{\text{nul si } k\leqslant n-3} \mathrm{P}_k = \frac{(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{P}_{n-1})}\mathrm{P}_{n-1} + \frac{(\mathrm{P}_{n-2}|\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_{n-2}|\mathrm{P}_{n-2})}\mathrm{P}_{n-2}.$$

Ainsi, en posant

$$\alpha_n = \frac{(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{P}_{n-1})} = -\frac{(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_{n-1}|\mathrm{P}_{n-1})} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{(\mathrm{P}_{n-2}|\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_{n-2}|\mathrm{P}_{n-2})} = -\frac{(\mathrm{P}_{n-2}|\mathrm{XP}_{n-1})}{(\mathrm{P}_{n-2}|\mathrm{P}_{n-2})},$$

la relation $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X} + \alpha_n)\mathrm{P}_{n-1} + \beta_n\mathrm{P}_{n-2}$ est vérifiée.

Dans le cas $n = 2$, on remarque simplement que le polynôme $\mathrm{P}_2 - \mathrm{XP}_1$ est de degré 1, si bien qu'il s'écrit comme combinaison linéaire de P_1 et de P_0, sans qu'il y ait besoin de constater que certains coefficients s'annulent.

Question 5. a. Comme n est strictement positif, le polynôme P_n est orthogonal à 1, qui est dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. La nullité du produit scalaire $(\mathrm{P}_n|1)$ s'écrit

$$\int_a^b \mathrm{P}_n(t)\mathrm{W}(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Supposons que P_n soit de signe constant sur l'intervalle $]a, b[$. Dans ce cas, la fonction $\mathrm{P}_n\mathrm{W}$ est continue, de signe constant, d'intégrale nulle, donc elle est identiquement nulle sur $]a, b[$. Mais ce n'est pas possible car la fonction W ne s'annule en aucun point de cet intervalle et le polynôme P_n n'a qu'un nombre fini de racines.

La fonction P_n prend donc à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives dans l'intervalle $]a, b[$. Comme c'est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que cette fonction s'annule en au moins un point de cet intervalle.

$\boxed{\text{Le polynôme } \mathrm{P}_n \text{ admet au moins une racine dans l'intervalle }]a, b[.}$

Le polynôme P_n admet une factorisation où les facteurs sont tous de la forme $(\mathrm{X} - \alpha)^m$ ou $(\mathrm{X}^2 + \beta\mathrm{X} + \gamma)^{\mu}$, le discriminant étant strictement négatif dans ce cas.
Les facteurs de degré 2 sont de signe constant sur $\mathbb{R}$.
Les facteurs de la forme $(\mathrm{X} - \alpha)^m$ tel que m est pair sont aussi de signe constant sur $\mathbb{R}$.
Les facteurs de la forme $(\mathrm{X} - \alpha)^m$ avec m impair ont un signe constant sur $]a, b[$ si α n'est pas dans cet intervalle.

Finalement, les seuls facteurs susceptibles de changer de signe dans l'intervalle $]a, b[$ sont ceux de la forme $(\mathrm{X}-\alpha)^m$, où α est dans $]a, b[$ et où m est impair.

$\boxed{\text{Le polynôme } \mathrm{P}_n \text{ possède au moins une racine dans }]a, b[\text{ ayant une multiplicité impaire.}}$

Question 5. b. Le raisonnement est le même qu'à la question précédente. En multipliant par Q, on a rendu paires les multiplicités de toutes les racines situées dans $]a,b[$. Les facteurs dans $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}$ sont donc tous de signe constant sur l'intervalle $]a,b[$, si bien qu'il en est de même pour la fonction $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}$.

La fonction $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}w$ est donc continue et de signe constant sur $]a,b[$. De plus, elle n'est pas identiquement nulle (car le polynôme $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}$ n'a qu'un nombre fini de racines et w ne s'annule pas du tout) donc l'intégrale

$$\int_a^b \mathrm{P}_n(t)\mathrm{Q}(t)w(t)\ \mathrm{d}t$$

n'est pas nulle.

$\boxed{\text{Le nombre } (\mathrm{P}_n|\mathrm{Q}) \text{ n'est pas nul.}}$

Question 5. c. Le polynôme Q ne peut pas être dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ car sinon, le nombre $(\mathrm{P}_n|\mathrm{Q})$ serait nul.
Il est donc de degré au moins n. L'entier p vaut donc au moins n.
Comme P_n est de degré n, l'entier p ne dépasse pas n. Il vaut donc exactement n.

Le polynôme P_n possède donc au moins n racines distinctes dans $]a,b[$. Comme il est de degré n, il possède en fait exactement n racines distinctes dans $]a,b[$, et celles-ci sont forcément des racines simples.

Question 6. a. La fonction w est bien continue et strictement positive sur $]-1,1[$. Il reste à prouver qu'elle est intégrable.
Prenons c et d dans $]-1,1[$. On trouve

$$\int_c^d \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Arcsin}(d) - \mathrm{Arcsin}(c).$$

Cette expression possède une limite finie quand d tend vers 1 et c'est vrai aussi quand c tend vers -1.
Par conséquent, l'intégrale $\int_{-1}^1 w(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Comme la fonction w est positive, on en déduit qu'elle est intégrable sur $]-1,1[$.

$\boxed{\text{La fonction } w \text{ vérifie les hypothèses du préambule du problème.}}$

Question 6. b. Soient R un polynôme pair et S un polynôme impair. On trouve alors

$$(\mathrm{R}|\mathrm{S}) = \int_{-1}^1 \mathrm{R}(t)\mathrm{S}(t)w(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

car c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

$\boxed{\text{Tout polynôme pair est orthogonal à tout polynôme impair.}}$

Question 6. c. Soit (P,Q) un couple de polynômes réels.

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On effectue le changement de variable $t \mapsto \mathrm{Arccos}(t) = u$, qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme [1] de l'intervalle $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$. L'élément intégrateur $\mathrm{d}u$ s'écrit $-\ \mathrm{d}t/\sqrt{1-t^2}$, ce qui donne

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = -\int_\pi^0 \mathrm{P}(\cos(u))\mathrm{Q}(\cos(u))\ \mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{P}(\cos(u))\mathrm{Q}(\cos(u))\ \mathrm{d}u.$$

---

1. C'est bien sûr faux si on n'exclut pas les bornes.

Question 6. d. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons I_n l'identité

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_n(\cos(u)) = \cos(nu).$$

L'identité (I_0) s'écrit

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_0(\cos(u)) = 1.$$

Elle est vraie puisque T_0 est le polynôme constant 1.

L'identité (I_1) s'écrit

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_1(\cos(u)) = \cos(u).$$

Elle est vraie puisque T_1 est le polynôme X.

Prenons maintenant un entier n supérieur ou égal à 2 pour lequel les identités (I_{n-1}) et (I_{n-2}) sont vraies. Soit $u \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$\mathrm{T}_n(\cos(u)) = 2\cos(u)\cos((n-1)u) - \cos((n-2)u) = (\cos((n-2)u) + \cos(nu)) - \cos((n-2)u) = \cos(nu).$$

On a utilisé au passage l'identité trigonométrique [2]

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).$$

On a montré que (I_{n-2}) et (I_{n-1}) impliquent (I_n).

Par récurrence, l'identité (I_n) est valable pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Question 6. e. Prenons deux entiers naturels n et m distincts.

$$(\mathrm{T}_n|\mathrm{T}_m) = \int_0^\pi \mathrm{T}_n(\cos(u))\mathrm{T}_m(\cos(u))\ \mathrm{d}u = \int_0^\pi \cos(nu)\cos(mu)\ \mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\cos((m+n)u) + \cos((m-n)u)}{2}\ \mathrm{d}u.$$

Pour tout entier relatif p non nul, on trouve

$$\int_0^\pi \cos(pu)\ \mathrm{d}u = \left[\frac{\sin(pu)}{p}\right]_0^\pi = 0.$$

Comme n et m sont distincts et positifs, les entiers $m+n$ et $m-n$ sont tous les deux non nuls. On en déduit que le produit scalaire $(\mathrm{T}_n|\mathrm{T}_m)$ est nul.

La famille de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Question 6. f. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons (D_n) la proposition

$$\deg(\mathrm{T}_n) = n.$$

Les propositions (D_0) et (D_1) sont vraies d'après les choix de T_0 et T_1.

Soit maintenant un entier n pour lequel les propositions (D_{n-1}) et (D_{n-2}) sont vraies.
Le polynôme $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1}$ est alors de degré n et le polynôme T_{n-2} est de degré $n-2$ donc leur différence $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1} - \mathrm{T}_{n-2}$ est de degré n.
La proposition (D_n) est donc vraie.

Par récurrence, l'égalité $\deg(\mathrm{T}_n) = n$ est valable pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Le raisonnement que l'on a effectué sur les degrés montre que pour tout entier $n \geqslant 2$, le coefficient dominant de T_n est celui de $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1}$, c'est-à-dire le double de celui de T_{n-1}.

Comme le coefficient dominant de T_1 vaut 1, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, le coefficient dominant de T_n vaut 2^{n-1}.
Celui de T_0 vaut 1.

2. Si l'on a oublié cette formule, on la retrouve en linéarisant le produit des cosinus au moyen des formules d'Euler.

Posons $Q_0 = 1$ et $Q_n = 2^{1-n}T_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Par le même argument qu'à la question 4, on justifie que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la famille $(Q_0, \dots, Q_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Comme Q_n est orthogonal à $Q_0, \dots, Q_{n-1}$, il est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

La famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc les conditions 1 et 2 énoncées à la question 3. On en déduit que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identique à la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui donne en particulier

$$P_0 = T_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n = 2^{1-n}T_n.$$

Les polynômes T_n s'appellent *les polynômes de Tchebychev.*

Question 7. a. Soit $(i,j) \in [\![0,k]\!]^2$ avec $i \neq j$. L'expression de L_i possède alors le facteur $X - x_j$, si bien que x_j est une racine de L_i.

Soit maintenant $i \in [\![0,n]\!]$. On obtient alors

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1.$$

On a bien montré que $\boxed{L_i(x_j) \text{ vaut } 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \text{ sinon.}}$

Question 7. b. Notons R le polynôme

$$R = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i)L_i.$$

Prenons un indice j dans $[\![0,k]\!]$. Une évaluation en x_j donne

$$R(x_j) = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{\text{nul si } i\neq j} = Q(x_j)L_j(x_j) = Q(x_j).$$

Ainsi, les polynômes R et Q coïncident en chacun des x_j.

Remarquons maintenant que les polynômes $L_0, \dots, L_k$ sont tous de degré k (chacun d'eux est un produit de k facteurs de degré 1). Comme le polynôme R en est une combinaison linéaire, il appartient à $\mathbb{R}_k[X]$.

Ainsi, les polynômes R et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$ qui coïncident en au moins $k+1$ points. Ils sont donc égaux, ce qui s'écrit

$$\boxed{Q = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i)L_i.}$$

Question 7. c. Soit $Q \in \mathbb{R}_k[X]$. La linéarité de l'intégrale donne alors directement

$$\int_a^b Q(t)w(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{k} Q(x_i)L_i(t)w(t)\right)\,dt = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i)\int_a^b L_i(t)w(t)\,dt = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i)\lambda_i.$$

Question 7. d. Prenons $Q \in \mathbb{R}_{2k+1}[X]$. Notons A et B son quotient et son reste dans la division euclidienne par le polynôme P_{k+1}, ce qui s'écrit

$$Q = AP_{k+1} + B.$$

Le polynôme B vérifie l'inégalité $\deg(B) < \deg(P_{k+1}) = k+1$, ce qui prouve que B est dans $\mathbb{R}_k[X]$.

De plus, le polynôme A est également dans $\mathbb{R}_k[X]$ car dans le cas contraire, le polynôme AP_{k+1} aurait un degré au moins $2k+2$ et ce serait vrai aussi pour le polynôme Q (le terme en X^{2k+2} ne peut pas être compensé par B).

On trouve maintenant

$$\int_a^b Q(t)w(t)\,dt = \int_a^b A(t)P_{k+1}(t)\,dt + \int_a^b B(t)w(t)\,dt = (A|P_{k+1}) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i B(x_i).$$

Remarquons maintenant qu'en évaluant l'égalité $\mathrm{Q} = \mathrm{AP}_{k+1} + \mathrm{B}$ aux x_i, on trouve

$$\forall i \in [\![0, k]\!], \qquad \mathrm{Q}(x_i) = \mathrm{B}(x_i).$$

De plus, comme A est dans $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$, il est orthogonal à P_{k+1}. Il reste donc

$$\int_a^b \mathrm{Q}(t)w(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathrm{Q}(x_i).$$

Cette relation est donc valable pour tout Q dans $\mathbb{R}_{2k+1}[\mathrm{X}]$.

Question 7. e. Soit $j \in [\![0, k]\!]$. Le polynôme L_j est de degré $2k$ donc la formule de la question précédente s'applique à ce polynôme

$$\int_a^b (\mathrm{L}_j(t))^2 w(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \underbrace{(\mathrm{L}_j(x_i))^2}_{\text{nul si } i \neq j} = \lambda_j (\mathrm{L}_j(x_j))^2 = \lambda_j.$$

Cette égalité s'écrit encore

$$\lambda_j = (\mathrm{L}_j | \mathrm{L}_j).$$

Comme L_j n'est pas le polynôme nul, sa norme est strictement positive, donc $\boxed{\lambda_j \text{ est strictement positif.}}$

Question 8. a. Soit $i \in [\![0, k]\!]$. La formule de la question 6.d donne

$$\mathrm{T}_{k+1}(x_i) = \cos((k+1)\theta_i) = \cos\left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Les nombres $x_0, \ldots, x_k$ sont donc des racines de T_{k+1}. La formule $\mathrm{P}_{k+1} = 2^{-k}\mathrm{T}_{k+1}$ montre que ce sont aussi des racines de P_{k+1}.

Remarquons maintenant les inégalités

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{k-1} < \theta_k < \pi.$$

Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur le segment $[0, \pi]$, on obtient les inégalités strictes

$$1 > x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > x_n > -1.$$

En particulier, les nombres $x_0, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts. Ce sont donc $k+1$ racines distinctes du polynôme P_{k+1}. Comme ce polynôme est de degré $k+1$, nous avons là toutes ses racines.

$\boxed{\text{Les nombres } x_0, \ldots, x_k \text{ sont les racines du polynôme } \mathrm{P}_{k+1}.}$

Question 8. b. Dérivons dans l'identité de la question 6.d. On obtient

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad -\sin(u)\mathrm{T}'_{k+1}(\cos(u)) = -(k+1)\sin((k+1)u).$$

Soit $i \in [\![0, k]\!]$. En substituant θ_i à u, on obtient

$$\sin(\theta_i)\mathrm{T}'_{k+1}(x_i) = (k+1)\sin((k+1)\theta_i) = (k+1)\sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right) = (k+1)(-1)^i.$$

Comme θ_i est dans $]0, \pi[$, son sinus est non nul, et on obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{T}'_{k+1}(x_i) = (k+1)\frac{(-1)^i}{\sin(\theta_i)}}.$$

Dans l'expression du polynôme L_i, remarquons que le numérateur est le polynôme associé à la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}$ par

$$t \mapsto \frac{\mathrm{P}_{k+1}(t)}{t - x_i}.$$

Le dénominateur est la valeur en x_i de ce polynôme. C'est donc la limite en x_i de cette fonction polynomiale (car elle est continue en x_i). Cette limite vaut $\mathrm{P}'_{k+1}(x_i)$. On trouve donc, pour tout t dans $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}$,

$$\mathrm{L}_i(t) = \frac{\mathrm{P}_{k+1}(t)}{\mathrm{P}'_{k+1}(x_i)(t - x_i)} = \frac{\mathrm{T}_{k+1}(t)}{\mathrm{T}'_{k+1}(x_i)(t - x_i)}.$$

En substituant dans l'expression de λ_i, on obtient donc

$$\lambda_i = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{T}_{k+1}(t)}{\mathrm{T}'_{k+1}(x_i)(t - x_i)} w(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^i \frac{\sin(\theta_i)}{k+1} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{T}_{k+1}(t)}{t - x_i} \times \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

On effectue maintenant le même changement de variable qu'à la question 6.c, pour obtenir

$$\lambda_i = (-1)^i \frac{\sin(\theta_i)}{k+1} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{T}_{k+1}(\cos(u))}{\cos(u) - x_i}\ \mathrm{d}u = \frac{\sin(\theta_i)}{k+1} \int_0^{\pi} \frac{\cos((k+1)u)}{\cos(u) - \cos(\theta_i)}\ \mathrm{d}u.$$

Question 8. c. Prenons j dans $\mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto \dfrac{\cos(ju) - \cos(j\theta_i)}{\cos(u) - \cos(\theta_i)}$ est définie et continue sur $[0, \theta_i[\cup]\theta_i, \pi]$.

De plus, ce quotient se réécrit

$$\frac{\cos(ju) - \cos(j\theta_i)}{u - \theta_i} \times \frac{u - \theta_i}{\cos(u) - \cos(\theta_i)},$$

ce qui est un quotient de deux taux d'accroissements.

Quand u tend vers θ_i, ces taux d'accroissements tendent vers $-j \sin(j\theta_i)$ et $-\sin(\theta_j)$. Comme ce dernier est non nul, le quotient proposé tend vers $j \frac{\sin(j\theta_i)}{\sin(\theta_i)}$.

La fonction à intégrer possède donc un prolongement par continuité sur $[0, \pi]$. Cela justifie son intégrabilité sur l'ensemble $[0, \theta_i[\cup]\theta_i, \pi]$. L'intégrale H_j existe donc.

Soit maintenant j dans $\mathbb{N}^*$. La linéarité de l'intégrale donne

$$\mathrm{H}_{j+1} + \mathrm{H}_{j-1} = \int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{T}_{j+1}(\cos(u)) + \mathrm{T}_{j-1}(\cos(u))) - (\mathrm{T}_{j+1}(\cos(\theta_i)) + \mathrm{T}_{j+1}(\cos(\theta_i)))}{\cos(u) - \cos(\theta_i)}\ \mathrm{d}u.$$

La relation de récurrence de la question 6 donne ensuite

$$\mathrm{H}_{j+1} + \mathrm{H}_{j-1} = \int_0^{\pi} \frac{2\cos(u)\mathrm{T}_j(\cos(u)) - 2\cos(\theta_i)\mathrm{T}_j(\cos(\theta_i))}{\cos(u) - \cos(\theta_i)}\ \mathrm{d}u.$$

En soustrayant $2\cos(\theta_i)\mathrm{H}_j$, il reste

$$\mathrm{H}_{j+1} + \mathrm{H}_{j-1} - 2\cos(\theta_i)\mathrm{H}_j = \int_0^{\pi} \frac{2(\cos(u) - \cos(\theta_i))\mathrm{T}_j(\cos(u))}{\cos(u) - \cos(\theta_i)}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi} 2\mathrm{T}_j(\cos(u))\ \mathrm{d}u = 2(\mathrm{T}_j|1) = 0$$

car j est strictement positif.

On a alors obtenu la relation de récurrence

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{H}_{j+1} + \mathrm{H}_{j-1} = 2\cos(\theta_i)\mathrm{H}_j.$$

Pour tout entier j, notons Z_j l'égalité

$$\mathrm{H}_j = \pi \times \frac{\sin(j\theta_i)}{\sin(\theta_i)}.$$

L'intégrale H_0 est nulle (l'intégrande est nul), si bien que l'égalité Z_0 est vraie.

L'intégrale H_1 vaut π (l'intégrande vaut 1), si bien que l'égalité Z_1 est vraie.

Soit maintenant un entier j strictement positif pour lequel les égalités H_{j-1} et H_j sont vraies. On trouve alors

$$\mathrm{H}_{j+1} = 2\cos(\theta_i)\mathrm{H}_j - \mathrm{H}_{j-1} = \pi \frac{2\cos(\theta_i)\sin(j\theta_i) - \sin((j-1)\theta_i)}{\sin(\theta_i)}.$$

Rappelons l'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y).$$

On trouve en particulier

$$2\cos(\theta_i)\sin(j\theta_i) = \sin((j+1)\theta_i) + \sin((j-1)\theta_i) \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{H}_{j+1} = \pi \frac{\sin((j+1)\theta_i)}{\sin(\theta_i)}.$$

L'égalité H_{j+1} est prouvée.

$\boxed{\text{Par récurrence, l'égalité } \mathrm{H}_j = \pi \sin(j\theta_i)/\sin(\theta_i) \text{ est valable pour tout } j \in \mathbb{N}.}$

Question 8. d. On trouve en particulier

$$\mathrm{H}_{k+1} = \pi \frac{\sin((k+1)\theta_i)}{\sin(\theta_i)} = \pi \frac{(-1)^i}{\sin(\theta_i)}.$$

L'égalité $\cos((k+1)\theta_i) = 0$ donne ensuite

$$\lambda_i = (-1)^i \frac{\sin(\theta_i)}{k+1} \mathrm{H}_{k+1} = \frac{\pi}{k+1}.$$

Ainsi, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_{2k+1}[\mathrm{X}]$, on obtient la formule

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Q}\left(\cos\left(\frac{2i+1}{k+1}\pi\right)\right).}$$

Problème II

a. La relation $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{Y}$ donne $\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{A}_i$.

---

b. En exploitant la relation précédente, la matrice Δ_j s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathrm{A}_1 & \cdots & \mathrm{A}_{j-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{A}_i & \mathrm{A}_{j+1} & \cdots & \mathrm{A}_n \end{array} \right)$$

La linéarité du déterminant par rapport à la j-ième colonne donne

$$\det(\Delta_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \det \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathrm{A}_1 & \cdots & \mathrm{A}_{j-1} & \mathrm{A}_i & \mathrm{A}_{j+1} & \cdots & \mathrm{A}_n \end{array} \right).$$

Pour tout indice i différent de j, le terme d'indice i est nul car c'est le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales. Il reste donc

$$\det(\Delta_j) = x_j \det \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathrm{A}_1 & \cdots & \mathrm{A}_{j-1} & \mathrm{A}_j & \mathrm{A}_{j+1} & \cdots & \mathrm{A}_n \end{array} \right) = x_j \det(\mathrm{A}).$$

On en déduit la relation $x_j = \dfrac{\det(\Delta_j)}{\det(\mathrm{A})}$ car $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Problème III

1. Dans le cas où la matrice A n'est pas inversible, la majoration à prouver est

$$0 \leqslant \prod_{j=1}^{n} ||\mathrm{A}_j||.$$

Cette inégalité est vraie car la norme de tout vecteur est positive.

---

2. L'orthogonalisation de Gram-Schmidt passe dans un premier temps par la construction d'une base orthogonale $(\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1$ puis

$$\forall j \in [\![2, n]\!], \qquad \mathrm{B}_j = \mathrm{A}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathrm{B}_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}_j}{\mathrm{B}_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}_k} \mathrm{B}_k.$$

La base $\mathcal{U}$ est alors choisie en posant

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad \mathrm{U}_j = \frac{\mathrm{B}_j}{||\mathrm{B}_j||}.$$

On obtient donc les formules

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1 = ||\mathrm{B}_1|| \times \mathrm{U}_1 = ||\mathrm{A}_1|| \times \mathrm{U}_1$$

et

$$\forall j \in seg2, n]\!], \qquad \mathrm{A}_j = \mathrm{B}_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathrm{B}_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}_j}{\mathrm{B}_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}_k} \mathrm{B}_k = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathrm{B}_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}_j}{\mathrm{B}_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}_k} ||\mathrm{B}_k|| \mathrm{U}_k + ||\mathrm{B}_j|| \mathrm{U}_j.$$

Ainsi, pour tout indice j dans $[\![1, n]\!]$, le vecteur A_j est une combinaison linéaire de $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_j$. Cela prouve que la matrice de passage P est triangulaire supérieure.

---

3. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On connaît les relations

$$\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{U} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}).$$

La formule de changement de base donne $\mathrm{A} = \mathrm{U} \times \mathrm{P}$ puis $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{U}) \times \det(\mathrm{P})$.

La matrice U est une matrice de passage entre deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc c'est une matrice orthogonale. Son déterminant vaut donc 1 ou -1 donc $|\det(\mathrm{A})| = |\det(\mathrm{P})|$.

---

4. La base $\mathcal{U}$ étant orthonormale, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, la décomposition de A_i dans cette base est

$$\mathrm{A}_i = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{A}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}_j) \mathrm{U}_j.$$

Le coefficient devant U_i dans la décomposition de A_i vaut donc

$$p_{i,i} = \mathrm{A}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}_i.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors $|p_{i,i}| \leqslant ||\mathrm{A}_i|| \times ||\mathrm{U}_i|| = ||\mathrm{A}_i||$.

---

5. La matrice P est triangulaire supérieure donc

$$\det(\mathrm{P}) = \prod_{i=1}^{n} p_{i,i}.$$

On obtient finalement

$$|\det(\mathrm{A})| = |\det(\mathrm{P})| = \prod_{i=1}^{n} |p_{i,i}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} ||\mathrm{A}_i||.$$

Problème IV

1. Le produit matriciel donne

$$\mathrm{A}_n \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ \vdots \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de Cramer, on obtient $b_n = \det(\mathrm{B}_n) / \det(\mathrm{A}_n)$, en ayant posé

$$\mathrm{B}_n = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

2. Soit N dans $\mathbb{N}$. En développant, on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} |a_n a_m| r^{n+m}.$$

Dans cette somme double, les termes associés à des couples d'indices distincts sont positifs. Il reste alors

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n\right)^2 \geqslant \sum_{n=0}^{N} (a_n)^2 r^{2n},$$

puis

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n)^2 r^{2n} \leqslant C^2.$$

La suite de terme général $\sum\limits_{n=0}^{N} (a_n)^2 r^{2n}$ est donc majorée. Elle est également croissante (c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs). Elle est donc convergente. En d'autre termes, la série de terme général $(a_n)^2 r^{2n}$ est convergente.

De plus, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, il reste

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 r^{2n} \leqslant C^2.$$

3.a. Le déterminant est linéaire selon chaque ligne, donc

$$\text{dét}(Z_n) = \text{dét}(B_n) \times \prod_{i=1}^{n+1} r^{i-1} = \text{dét}(B_n) \times r^{n(n+1)/2}.$$

3.b. La matrice Z_n s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ ra_1 & ra_0 & \ddots & & & 0 \\ r^2 a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & r^{n-1}a_0 & 0 \\ r^n a_n & \cdots & \cdots & r^n a_2 & r^n a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'inégalité d'Hadamard s'écrit donc

$$\begin{aligned} |\text{dét}(Z_n)| \leqslant & \sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 r^2 + \cdots + (a_n)^2 r^{2n}} \times \\ & r\sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 r^2 + \cdots + (a_{n-1})^2 r^{2n-2}} \times \\ & \cdots \times \\ & r^{n-1}\sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 r^2} \times \\ & 1. \end{aligned}$$

Chaque racine carrée abrite une somme partielle de la série de la question 2. Chacun de ces facteurs peut donc être majoré par C. On obtient donc

$$|\text{dét}(Z_n)| \leqslant C^n \prod_{k=0}^{n-1} r^k = C^n \times r^{n(n-1)/2}.$$

3.c. On en déduit la majoration

$$|\text{dét}(\mathrm{B}_n)| \leqslant \frac{\mathrm{C}^n \times r^{n(n-1)/2}}{r^{n(n+1)/2}} = \frac{\mathrm{C}^n}{r^n}.$$

Le déterminant de A_n vaut $(a_0)^{n+1}$ donc

$$|b_n| = \frac{|\text{dét}(\mathrm{B}_n)|}{|\text{dét}(\mathrm{A}_n)|} \leqslant \frac{\mathrm{C}^n}{r^n} \times \frac{1}{|a_0|^{n+1}} = \frac{\alpha^n}{|a_0|}$$

en ayant posé $\alpha = \mathrm{C}/(r|a_0|)$ (c'est une constante strictement positive indépendante de n).

---

4. Introduisons les coefficients a_n du développement en série entière de la fonction f

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

L'égalité $a_0 = f(0)$ prouve que a_0 n'est pas nul. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc les hypothèses du préambule, si bien qu'il est possible de lui associer la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du préambule.

Posons $r = \mathrm{R}/2$. C'est un nombre strictement positif et on sait que la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente. On peut donc lui associer la constante C introduite à la question 2 et la constante α introduite à la question 3.

La domination de la question 3.c donne

$$\text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right) \geqslant \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n x^n\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

Posons $\rho = 1/\alpha$. On peut alors définir sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$ la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Notons $\mu = \min(\rho, \mathrm{R})$. Pour tout x dans l'intervalle $]-\mu, \mu[$, le théorème du produit de Cauchy donne l'égalité

$$f(x) \times g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n = 1.$$

On en déduit donc que pour tout x dans l'intervalle $]-\mu, \mu[$, le nombre $1/f(x)$ est défini et qu'il s'exprime comme suit

$$\frac{1}{f(x)} = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

On a prouvé que la fonction $1/f$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-\mu, \mu[$.
