

**Problème I : déterminant de Gram (\*\*)**

On fixe un entier  $n$  supérieur ou égal à 2 et on considère un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ , dont on note  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire. On note également  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour toute famille finie  $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$ , on note  $\text{Gram}(u_1, \dots, u_p)$ , ou  $\text{Gram}(\mathcal{U})$ , la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  qui s'écrit  $((u_i | u_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ . Cette matrice s'appelle *la matrice de Gram*<sup>1</sup> de la famille  $\mathcal{U}$ .

En outre, on note  $G(u_1, \dots, u_p)$ , ou  $G(\mathcal{U})$ , le déterminant de cette matrice. Ce nombre s'appelle *le déterminant de Gram* de la famille  $\mathcal{U}$ .

**Question 1.** Dans cette question, on considère un couple  $(u, v)$  de vecteurs quelconques de  $E$ .

- a. Montrer l'inégalité  $G(u, v) \geq 0$ .
- b. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $P$  de dimension 2 qui contient les vecteurs  $u$  et  $v$ .
- c. On considère donc un tel sous-espace vectoriel  $P$  et on le munit d'une base orthonormale  $\mathcal{B}$ . Montrer l'égalité  $G(u, v) = (\det_{\mathcal{B}}(u, v))^2$ .
- d. À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur la famille  $(u, v)$  le nombre  $G(u, v)$  est-il nul ?

**Question 2.** Dans cette question, on fixe un entier  $p$  supérieur ou égal à 2 ainsi qu'une famille  $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$  de  $p$  vecteurs (quelconques) de  $E$ .

On introduit une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de l'espace euclidien  $E$  et on note  $A$  la matrice qui représente la famille  $\mathcal{U}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- a. Montrer l'égalité  $\text{Gram}(u_1, \dots, u_p) = {}^t A \cdot A$ .
- b. Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , montrer l'égalité  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^t M \cdot M)$ .
- c. Montrer que l'égalité  $G(u_1, \dots, u_p) = 0$  équivaut à ce que la famille  $\mathcal{U}$  soit liée.
- d. On suppose dans cette question que la famille  $\mathcal{U}$  est libre. On note alors  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $\mathcal{U}$ .

Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire supérieure  $T$  à coefficients diagonaux strictement positifs vérifiant l'égalité

$$\text{Gram}(u_1, \dots, u_p) = {}^t T \cdot T.$$

On pourra pour cela faire appel au théorème de Gram-Schmidt.

- e. En déduire que si la famille  $\mathcal{U}$  est libre, alors son déterminant de Gram est strictement positif.

**Question 3.** Dans cette question, on considère un entier  $p$  supérieur ou égal à 2 ainsi qu'une famille  $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$ . On suppose de plus que cette famille est libre et on note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  qu'elle engendre.

Par ailleurs, on fixe un vecteur  $x$  quelconque de  $E$ , que l'on décompose sous la forme  $x = y + z$ , où  $y$  est le projeté orthogonal du vecteur  $x$  sur  $F$ .

a. Rappeler la définition de la distance de  $x$  à  $F$ , que l'on note  $d(x, F)$ . Rappeler ce que vaut cette distance en fonction des notations qui viennent d'être introduites.

- b. Montrer qu'il existe des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  vérifiant l'égalité

$$y = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k.$$

- c. À l'aide d'une combinaison linéaire de colonnes bien choisie, montrer l'égalité

$$G(u_1, \dots, u_p, x) = G(u_1, \dots, u_p) \times \|z\|^2.$$

- d. En déduire une expression de  $d(x, F)$  à l'aide du déterminant de Gram.

---

1. On l'aura compris, il s'agit du même Gram que celui dont le nom est accolé à Schmidt dans l'intitulé du théorème d'orthogonalisation. Il s'agit du mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916).

**Question 4.** Dans cette question, on fixe un entier  $m$  strictement positif et on suppose que  $E$  est l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_m[X]$  des polynômes réels de degré au plus  $m$ .

a. Pour tout entier naturel  $i$ , prouver que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$  est convergente, de valeur  $i!$ .

b. Montrer qu'on peut définir un produit scalaire  $( | )$  sur  $\mathbb{R}_m[X]$  en posant

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_m[X])^2, \quad (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

c. Montrer l'égalité suivante

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left( t^m - (a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0) \right)^2 e^{-t} dt ; (a_0, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{R}^m \right\} = \frac{G(1, X, \dots, X^{m-1}, X^m)}{G(1, X, \dots, X^{m-1})}.$$

**Question 5.** Le but de cette question est de calculer le quotient qui intervient dans l'expression de la borne inférieure de la question précédente.

Pour cela, on introduit les polynômes  $P_0, \dots, P_m$  suivants

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad P_j = \frac{(X+j)(X+j-1)\dots(X+1)}{j!}.$$

a. Pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ , préciser le degré du polynôme  $P_j$ .

b. Montrer qu'il existe des coefficients réels  $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$  vérifiant l'égalité suivante

$$\frac{X(X-1)\dots(X-m+1)}{m!} = P_m + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j P_j.$$

c. Pour tout entier naturel  $s$ , on introduit la matrice  $M_s$  de  $\mathcal{M}_{s+1}(\mathbb{R})$  définie par  $M_s = \left( \binom{i+j}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq s}$ . On remarquera que les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de l'indice 0 pour plus de commodité.

Vérifier l'égalité  $\binom{i+j}{j} = P_j(i)$  pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 0, m \rrbracket^2$  puis, en effectuant l'opération  $C_m \leftarrow C_m + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j C_j$ , montrer l'égalité

$$\det(M_m) = \det(M_{m-1}).$$

d. En déduire la valeur du quotient  $\frac{G(1, X, \dots, X^{m-1}, X^m)}{G(1, X, \dots, X^{m-1})}$ .

**Exercice 1. (\*\*)** Soit  $E$  un espace euclidien. On considère deux vecteurs  $a$  et  $b$  distincts et de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion de  $E$  qui envoie  $a$  sur  $b$ .

**Exercice 2. (\*\*\*)** Soit un entier  $n \geq 2$ . Soit  $\mathcal{L}$  un endomorphisme de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On fait l'hypothèse

$$\forall O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}(O^T S O) = O^T \mathcal{L}(S) O.$$

Montrer que  $\mathcal{L}$  est de la forme  $S \mapsto \mu S + \lambda \text{tr}(S) I_n$  pour un certain couple  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3. (\*\*\*)** Soit  $E$  un espace euclidien. Soient  $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$  des vecteurs de  $E$ .

Pour tout couple  $(i, j)$  d'indices, on fait l'hypothèse  $(x_i | x_j) = (y_i | y_j)$ . Montrer qu'il existe une isométrie  $f$  de  $E$  qui envoie  $x_1, \dots, x_p$  sur  $y_1, \dots, y_p$  respectivement.