PC* — mathématiques **jeudi 29 mars 2018**
Corrigé du devoir en temps libre n° 11

Corrigé du devoir en temps libre n° 11

Problème I

Question 1. a. Le déterminant de Gram $\mathrm{G}(u,v)$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}(u|u) & (u|v)\\(v|u) & (v|v)\end{pmatrix}$. Ce déterminant vaut

$$\mathrm{G}(u,v) = ||u||^2 \times ||v||^2 - ((u|v))^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut affirmer que $\boxed{\mathrm{G}(u,v) \text{ est positif.}}$

Question 1. b. Si la famille (u,v) est libre, alors elle engendre un espace vectoriel P de dimension 2, auquel les vecteurs u et v appartiennent tous deux.

Si elle est de rang 1, alors il existe dans E un vecteur w qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(u,v)$. Dans ce cas, l'espace P engendré par la famille (u,v,w) est de dimension 2 et il contient les vecteurs u et v.

Enfin, si (u,v) est une famille de rang nul, cela signifie que u et v sont tous deux nuls. Comme E est de dimension au moins 2, cet espace vectoriel possède au moins un sous-espace vectoriel P de dimension 2, qui contient alors forcément les vecteurs u et v.

Question 1. c. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et décomposons les vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$:

$$u = ae_1 + ce_2 \qquad \text{et} \qquad v = be_1 + de_2.$$

On peut alors écrire

$$\mathrm{G}(u,v) = (a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2 = a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd = (ad-bc)^2 = (\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{dét}}(u,v))^2.$$

Question 1. d. Le nombre $\mathrm{G}(u,v)$ est nul si, et seulement si, le nombre $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{dét}}(u,v)$ est nul, ce qui équivaut à dire que la famille (u,v) est liée.

La formule de la question 1.c n'est en fait pas nécessaire pour arriver à cette conclusion. En effet, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut conclure directement que $\mathrm{G}(u,v)$ est nul si, et seulement si, la famille (u,v) est libre.

Question 2. a. Notons $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ les colonnes de la matrice A et notons ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]$, on sait que $\alpha_{i,j}$ vaut ${}^t\mathrm{A}_i \cdot \mathrm{A}_j$. Comme les colonnes A_i et A_j représentent les vecteurs u_i et u_j dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, ce produit vaut aussi $(u_i|u_j)$.

$\boxed{\text{La matrice } {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} \text{ est donc égale à } \mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_p).}$

Question 2. b. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$. On connaît l'égalité $\mathrm{M} \cdot \mathrm{X} = 0$ et on en déduit l'égalité ${}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{X} = 0$, qui prouve que X est dans $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M})$.
On a alors prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M})$.

Réciproquement, soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M})$. On connaît l'égalité ${}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{X} = 0$ et on en déduit l'égalité ${}^t\mathrm{X} \cdot {}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{X} = 0$, ce qui se réécrit ${}^t(\mathrm{MX}) \cdot (\mathrm{MX}) = 0$, ce qui prouve que le vecteur colonne MX est nul car l'application $(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \mapsto {}^t\mathrm{Y} \cdot \mathrm{Z}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X appartient donc à $\mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.
On a alors prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\boxed{\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M}).}$

Question 2. c. La famille $\mathcal{U}$ est liée si et seulement si l'espace $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ est non trivial. Cela revient à dire que $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A})$ est non trivial. Comme la matrice ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$ est carrée, cela revient à dire que cette matrice n'est pas inversible, ou encore que son déterminant est nul.

On a montré que $\boxed{\text{la famille } \mathcal{U} \text{ est liée si et seulement si le déterminant } \mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p) \text{ est nul.}}$

Question 2. d. Le théorème de Gram-Schmidt donne l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_p)$ de F vérifiant les propriétés suivantes

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \qquad \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_k) = \mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_k) \qquad \text{et} \qquad (u_k|f_k) > 0.$$

Notons T la matrice qui représente la famille $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{F}$. C'est une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Comme pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le vecteur u_k est dans $\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_k)$, la matrice T est triangulaire supérieure.

De plus, comme T est la matrice représentative de la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ dans la base orthonormale $(f_1,\ldots,f_p)$ de F, les coefficients de la matrice T s'écrivent $\mathrm{T}_{i,j} = (f_i|u_j)$. En particulier, ses coefficients diagonaux s'écrivent $\mathrm{T}_{i,i} = (f_i|u_i)$, ce qui est strictement positif.

Enfin, l'égalité ${}^t\mathrm{T} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{Gram}(u_1,\ldots,u_p)$ est valable pour la même raison que la formule de la question 2.a.

Question 2. e. Supposons que la famille $\mathcal{U}$ est libre. On peut alors lui appliquer la construction de la question précédente et obtenir l'égalité $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p) = (\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{T}))^2$. Comme la matrice T est inversible, le déterminant de Gram de la famille libre $\mathcal{U}$ est strictement positif.

Question 3. a. La définition de la distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F est

$$d(x,\mathrm{F}) = \inf\{||x-v|| \ ; \ v \in \mathrm{F}\}.$$

On sait que cette borne inférieur est en fait un minimum et que ce minimum est égal à

$$d(x,\mathrm{F}) = ||x - p_{\mathrm{F}}(x)|| = ||x-y|| = ||z||,$$

où l'on a noté p_{F} le projecteur orthogonal sur F.

Question 3. b. La famille $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de F et le vecteur y appartient à F (car c'est le projeté orthogonal de x sur F) donc il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\ldots,u_p$:

$$\boxed{\text{Il existe } (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ vérifiant l'égalité } y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k.}$$

Question 3. c. Le déterminant à calculer s'écrit

$$\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p,x) = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & \cdots & (u_1|u_p) & (u_1|x) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & \cdots & (u_2|u_p) & (u_2|x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (u_p|u_1) & (u_p|u_2) & \cdots & (u_p|u_p) & (u_p|x) \\ (x|u_1) & (x|u_2) & \cdots & (x|u_p) & (x|x). \end{vmatrix}$$

L'égalité $x - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = z$ incite à effectuer l'opération $\mathrm{C}_{p+1} \leftarrow \mathrm{C}_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathrm{C}_k$ dans le déterminant $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p,x)$. On obtient

$$\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p,x) = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & \cdots & (u_1|u_p) & (u_1|z) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & \cdots & (u_2|u_p) & (u_2|z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (u_p|u_1) & (u_p|u_2) & \cdots & (u_p|u_p) & (u_p|z) \\ (x|u_1) & (x|u_2) & \cdots & (x|u_p) & (x|z). \end{vmatrix}$$

Comme les u_k sont dans F et z est dans $\mathrm{F}^{\perp}$, les nombres $(u_k|z)$ sont nuls. On trouve de plus $(x|z) = (y+z|z) = ||z||^2$ car y et z sont orthogonaux.

Il reste donc

$$\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p,x) = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & \cdots & (u_1|u_p) & 0 \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & \cdots & (u_2|u_p) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (u_p|u_1) & (u_p|u_2) & \cdots & (u_p|u_p) & 0 \\ (x|u_1) & (x|u_2) & \cdots & (x|u_p) & ||z||^2. \end{vmatrix}$$

On a obtenu une matrice triangulaire par blocs. On obtient donc l'égalité $\boxed{\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p,x) = \mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p) \times ||z||^2.}$

Question 3. d. Comme le nombre $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_p)$ est strictement positif, on trouve finalement

$$\boxed{d(x, \mathrm{F}) = \sqrt{\frac{\mathrm{G}(u_1, \ldots, u_p, x)}{\mathrm{G}(u_1, \ldots, u_p)}}.}$$

Question 4. a. Soit i un entier naturel. La fonction $f_i : t \mapsto t^i \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on remarque par exemple que $f_i(t)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{-t/2}$ quand t tend vers $+\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on en déduit que f_i est également intégrable sur $[0, +\infty[$.

On a prouvé que $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^i \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ est convergente pour tout } i \text{ dans } \mathbb{N}.}$

Ensuite, prenons un entier i et un élément A de $[0, +\infty[$. Effectuons une intégration par parties. On dérive la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et on intègre la fonction $t \mapsto t^i$ en $t \mapsto t^{i+1}/(i+1)$. On obtient

$$\int_0^{\mathrm{A}} t^i \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{A}^{i+1}}{i+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}} + \frac{1}{i+1} \int_0^{\mathrm{A}} t^{i+1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

En faitsant tendre A vers $+\infty$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} t^i \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{i+1} \int_0^{+\infty} t^{i+1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ vaut 1. Par itération de la relation de récurrence, on trouve finalement

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^i \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = i!\ .}$$

Question 4. b. Remarquons déjà que pour tout polynôme réel R, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{R}(t) \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente car la fonction $t \mapsto \mathrm{R}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une combinaison linéaire finie des fonctions de la forme $t \mapsto t^i \mathrm{e}^{-t}$.

$\boxed{\text{L'application proposée par l'énoncé est donc bien définie.}}$

Comme d'habitude, je zappe les détails concernant la démonstration du fait que cette application est bilinéaire, symétrique et positive, pour me concentrer sur son caractère défini positif car il est vite fait d'oublier des arguments.

Considérons un polynôme P pour lequel $(\mathrm{P}|\mathrm{P})$ est nul. La fonction $t \mapsto (\mathrm{P}(t))^2 \mathrm{e}^{-t}$ est alors continue sur $[0, +\infty[$, positive et d'intégrale nulle, donc elle est nulle. Par conséquent, le polynôme P s'annule sur $[0, +\infty[$. Ça lui fait une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

L'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto (\mathrm{P}|\mathrm{Q})$ est donc définie positive, ce qui conclut la démonstration du fait qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Question 4. c. La borne inférieure demandée s'écrit aussi

$$\inf \left\{ \left|\left| \mathrm{X}^m - \sum k = 0^{m-1} a_k \mathrm{X}^k \right|\right|^2 \ ;\ (a_0, \ldots, a_{m-1}) \in \mathbb{R}^m \right\} \qquad \text{ou encore} \qquad \inf \left\{ ||\mathrm{X}^m - \mathrm{Q}||^2 \ ;\ \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{X}] \right\}.$$

Cette borne inférieure n'est autre que $\Big(d(\mathrm{X}^m, \mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{X}]) \Big)^2$. Comme le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{X}]$ admet pour base la famille $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{m-1})$, la formule de la question 3.d donne l'égalité demandée

$$\boxed{\Big(d(\mathrm{X}^m, \mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{X}]) \Big)^2 = \frac{\mathrm{G}(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{m-1}, \mathrm{X}^m)}{\mathrm{G}(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{m-1})}.}$$

Question 5. a. Le polynôme P_0 est de degré 0 (c'est un polynôme constant non nul). Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, le polynôme P_j est de degré j car il est défini comme un produit de j polynômes de degré 1.

$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0, m]\!], \text{ le polynôme } \mathrm{P}_j \text{ est de degré } j.}$

Question 5. b. Les polynômes $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m$ appartiennent tous à $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$. De plus, ce sont des polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts donc ils forment une famille libre. C'est une famille libre de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ et $m+1$ est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ donc la famille $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$.

Le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!}$ est de degré m donc il appartient à $\mathbb{R}_m[X]$. Il existe donc des coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ vérifiant l'égalité

$$\frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j P_j.$$

Les polynômes $P_0, \ldots, P_{m-1}$ ont tous un degré strictement inférieur à m donc ils ne comportent aucun terme en X^m. Ainsi, en isolant les termes en X^m dans l'égalité précédente, on trouve

$$\frac{1}{m!} = \frac{\lambda_m}{m!} \qquad \text{donc} \qquad \lambda_m = 1.$$

On obtient donc $\displaystyle\frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!} = P_m + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j P_j.$

Question 5. c. Déjà, pour tout entier i, on peut écrire $\binom{i}{0} = 1 = P_0(i)$.

Prenons maintenant un entier j dans $[\![1, m]\!]$.

$$\forall i \in [\![0, m]\!], \qquad P_j(i) = \frac{(i+j)(i+j-1)\cdots(i+1)}{j!} = \frac{(i+j)!}{i!j!} = \binom{i+j}{j}.$$

$$\boxed{\text{L'égalité } P_j(i) = \tbinom{i+j}{j} \text{ est donc valable pour tout } (i,j) \in [\![0, m]\!]^2.}$$

La matrice M_m s'écrit donc $\begin{pmatrix} P_0(0) & P_1(0) & \cdots & P_{m-1}(0) & P_m(0) \\ P_0(1) & P_1(1) & \cdots & P_{m-1}(1) & P_m(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_0(m-1) & P_1(m-1) & \cdots & P_{m-1}(m-1) & P_m(m-1) \\ P_0(m) & P_1(m) & \cdots & P_{m-1}(m) & P_m(m) \end{pmatrix}$.

Notons Q le polynôme $\displaystyle\frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!}$. Effectuons l'opération $C_m \leftarrow C_m + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j C_j$. On trouve

$$\det(M_m) = \det \begin{pmatrix} P_0(0) & P_1(0) & \cdots & P_{m-1}(0) & Q(0) \\ P_0(1) & P_1(1) & \cdots & P_{m-1}(1) & Q(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_0(m-1) & P_1(m-1) & \cdots & P_{m-1}(m-1) & Q(m-1) \\ P_0(m) & P_1(m) & \cdots & P_{m-1}(m) & Q(m) \end{pmatrix}.$$

Remarquons [1] maintenant les égalités $Q(0) = \cdots = Q(m-1) = 0$ et $Q(m) = 1$, qui donnent

$$\det(M_m) = \det \begin{pmatrix} P_0(0) & P_1(0) & \cdots & P_{m-1}(0) & 0 \\ P_0(1) & P_1(1) & \cdots & P_{m-1}(1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_0(m-1) & P_1(m-1) & \cdots & P_{m-1}(m-1) & 0 \\ P_0(m) & P_1(m) & \cdots & P_{m-1}(m) & 1 \end{pmatrix} = \det(M_{m-1}),$$

en remarquant finalement que M_m est triangulaire par blocs.

Question 5. d. Remarquons maintenant que dans le déterminant de la matrice M_m, on peut mettre $1/i!$ en facteur de la ligne numéro i et on peut mettre en facteur $1/j!$ en facteur de la ligne numéro j. En utilisant la linéarité du déterminant, on trouve alors

$$\det(M_m) = \frac{G(1, X, \ldots, X^m)}{(0!1!\cdots m!)^2} \qquad \text{et} \qquad \det(M_{m-1}) = \frac{G(1, X, \ldots, X^{m-1})}{(0!1!\cdots(m-1)!)^2}.$$

Après simplification, il reste $\displaystyle\frac{G(1, X, \ldots, X^m)}{G(1, X, \ldots, X^{m-1})} = (m!)^2.$

La borne inférieure de la question 4.c vaut donc $(m!)^2$.

Exercice 1. Analyse. Soit r une réflexion de E. On suppose que $r(a) = b$.

La relation $r^2 = \mathrm{Id}_E$ donne alors $r(b) = a$ donc $r(a-b) = -(a-b)$.

Le vecteur $a-b$ est non nul donc c'est un vecteur propre de r pour la valeur propre -1. L'espace propre $\mathrm{Ker}(r + \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1 donc il est dirigé par le vecteur $a-b$.

1. Eh oui, c'est encore un polynôme interpolateur de Lagrange !

On en déduit que r est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(a-b)^\perp$, ce qui prouve son unicité en cas d'existence.

Synthèse. Notons r la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(a-b)^\perp$. Cette réflexion s'écrit

$$r = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - 2p,$$

où p désigne la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a-b)$. On en déduit l'expression

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad r(x) = x - 2\frac{(a-b|x)}{(a-b|a-b)}(a-b).$$

Le but étant maintenant d'obtenir l'égalité $r(a) = b$, calculons $r(a) - b$. On trouve

$$r(a) - b = a - b - 2\frac{(a-b|a)}{(a-b|a-b)}(a-b) = \left(1 - 2\frac{(a-b|a)}{(a-b|a-b)}\right)(a-b).$$

Le coefficient en facteur de $a-b$ se réécrit ainsi

$$1 - 2\frac{(a-b|a)}{(a-b|a-b)} = \frac{(a-b|a-b) - 2(a-b|a)}{(a-b|a-b)} = \frac{-(a-b|a+b)}{(a-b|a-b)} = -\frac{||a||^2 - ||b||^2}{||a-b||^2} = 0.$$

On en déduit l'égalité $r(a) = b$.

On a ainsi prouvé qu'il existe exactement une réflexion r de E telle que $r(a) = b$.

Exercice 2. Notons $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En tant que matrice diagonale, la matrice $\mathrm{E}_{1,1}$ commute avec toutes les matrices diagonales. Parmi elles, celles de la forme $\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)$ sont des matrices orthogonales. Prenons une telle matrice O. On obtient alors $\mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{O} = \mathrm{O}$ donc $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = \mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{O}$.

La matrice $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$ commute donc avec toutes les matrices de la forme précédente. En particulier, elle commute avec $\mathrm{diag}(1,-1,\ldots,-1)$ donc elle laisse stable l'espace propre de cette matrice pour la valeur propre 1, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1)$. On en déduit que E_1 est un vecteur propre pour la matrice $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$.

On recommence en déplaçant le coefficient 1 parmi les -1, si bien que $\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_n$ sont des vecteurs propres pour la matrice $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$. Cette matrice est donc diagonale.

Pour tout couple (i,j) d'indices distincts entre 1 et n, notons $\mathrm{T}_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de I_n en permutant les colonnes i et j. Les colonnes de cette matrice sont celles de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans un autre ordre donc elles forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La matrice $\mathrm{T}_{i,j}$ est donc orthogonale.

Pour tout couple $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, on remarque que la matrice $\mathrm{T}_{i,j}$ commute avec $\mathrm{E}_{1,1}$. On en déduit l'égalité

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = \mathrm{T}_{i,j}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{T}_{i,j},$$

si bien que la matrice $\mathrm{E}_{1,1}$ commute avec $\mathrm{T}_{i,j}$.

Étant donné une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le coefficient en position (i,j) de $\mathrm{MT}_{i,j}$ est $m_{j,j}$ et c'est $m_{i,i}$ pour la matrice $\mathrm{T}_{i,j}\mathrm{M}$.

On en déduit que les coefficients diagonaux de $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$ autres que le premier sont tous égaux entre eux. Cette matrice est donc de la forme $\mathrm{diag}(a,b,\ldots,b)$ pour une certaine constante b, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = a\mathrm{E}_{1,1} + b\sum_{i=2}^{n}\mathrm{E}_{i,i} = (a-b)\mathrm{E}_{1,1} + b\mathrm{I}_n = (a-b)\mathrm{E}_{1,1} + b\,\mathrm{tr}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{I}_n.$$

Posons alors $\mu = a-b$ et $\lambda = b$. On va montrer dans la suite de l'exercice que $\mathcal{L}$ est l'application $\mathrm{S} \mapsto \mu\mathrm{S} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{S})\mathrm{I}_n$.

Soit j un indice différent de 1. Le calcul donne l'égalité $\mathrm{T}_{1,j}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{T}_{1,j} = \mathrm{E}_{j,j}$ donc

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{j,j}) = \mathrm{T}_{1,j}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{T}_{1,j} = \mathrm{T}_{1,j}^{\mathrm{T}}(\mu\mathrm{E}_{1,1} + \lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_{1,j} = \mu\mathrm{E}_{j,j} + \lambda\mathrm{I}_n = \mu\mathrm{E}_{j,j} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{E}_{j,j})\mathrm{I}_n.$$

Les matrices $\mathrm{E}_{1,1},\ldots,\mathrm{E}_{n,n}$ engendrent le sous-espace des matrices diagonales donc, pour toute matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient

$$\mathcal{L}(\mathrm{D}) = \mu\mathrm{D} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{D})\mathrm{I}_n.$$

Soit maintenant une matrice S quelconque de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{O}^\mathrm{T}\mathrm{S}\mathrm{O} = \mathrm{D}$. On obtient alors

$$\mathcal{L}(\mathrm{S}) = \mathcal{L}(\mathrm{ODO}^\mathrm{T}) = \mathrm{O}\mathcal{L}(\mathrm{D})\mathrm{O}^\mathrm{T} = \mathrm{O}(\mu\mathrm{D} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{D})\mathrm{I}_n)\mathrm{O}^\mathrm{T} = \mu\mathrm{ODO}^\mathrm{T} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{D})\mathrm{I}_n = \mu\mathrm{S} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{S})\mathrm{I}_n.$$

Exercice 3. Les familles $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ ont la même matrice de Gram donc elles ont le même rang, noté r. Quitte à changer la numérotation des x_i, on peut supposer que $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

On change alors de la même manière la numérotation des y_i afin que l'hypothèse $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$ demeure.

La matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_r)$ est alors la même que celle de $(y_1, \dots, y_r)$. On en déduit que ces deux familles sont de même rang, si bien que $(y_1, \dots, y_r)$ est de rang r. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_s)$.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_r)$ produit une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Le même procédé, appliqué à la famille $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_r)$, produit une base orthonormale $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_r)$ de $\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_p)$.

On peut alors montrer que les matrices de passage $\mathrm{M}_\mathcal{E}(\mathcal{X})$ et $\mathrm{M}_\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ sont égales : les coefficients de la première s'expriment comme combinaisons linéaires des $(x_i|x_j)$; ceux de la deuxième s'expriment de même en remplaçant les $(x_i|x_j)$ par les $(y_i|y_j)$, ce qui donne le même résultat. Cette matrice sera notée M plus loin.

Complétons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ en deux bases orthonormales $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ de E. On définit alors un endomorphisme f de E en envoyant les vecteurs de $\mathcal{E}'$ sur ceux de $\mathcal{F}'$ et en prenant soin que $f(e_i) = f_i$ pour tout i dans $[\![1, r]\!]$.

Cet endomorphisme envoie une base orthonormale de E sur une autre (ou la même) donc c'est une isométrie de E.

Soit $j \in [\![1, r]\!]$. Le vecteur x_j s'écrit sous la forme

$$x_j = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} e_j,$$

en notant $m_{i,j}$ les coefficients de la matrice M, et on obtient alors

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} f(e_j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} f_j = y_j.$$

Il reste à montrer cette égalité pour tout indice $j \in [\![r+1, p]\!]$.

Prenons un tel indice. Le vecteur x_j appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r)$ donc il admet une décomposition de la forme

$$x_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i,j} x_i.$$

On obtient alors les relations

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad (x_j|x_k) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i,j} (x_i|x_k).$$

En notant a le vecteur colonne de coordonnées $(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant r}$, on observe alors la relation

$$\begin{pmatrix} (x_j|x_1) \\ \vdots \\ (x_j|x_r) \end{pmatrix} = \mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_r) \times a.$$

La matrice $\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_r)$ est inversible d'après la question 2.c du premier problème. L'inversion de cette matrice permet d'exprimer les $\alpha_{i,j}$ en fonction des coefficients de $\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_p)$.

De même, on peut exprimer y_j comme combinaison linéaire de $y_1, \dots, y_r$ et les coefficients de cette combinaison linéaire s'expriment de la même manière en fonction des coefficients de $\mathrm{Gram}(y_1, \dots, y_p)$.

Ces deux matrices de Gram étant égales, les décompositions de x_j dans la base $(x_1, \dots, x_r)$ et de y_j dans la base $(y_1, \dots, y_r)$ sont identiques.

On en déduit alors l'égalité $f(x_j) = y_j$.
