PC* — mathématiques
Devoir surveillé n° 4bis

jeudi 20 décembre 2018
durée : 4 heures

Dans tout ce problème, on considère un entier n strictement positif. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes à n lignes et n colonnes. On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à n coefficients.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme canoniquement associé à M , c'est-à-dire l'endomorphisme $U \mapsto MU$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On rappelle que l'image, le noyau et les espaces propres de la matrice M sont ceux de f_M .

On note $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour tout entier j strictement positif, on pose

$$F_j = \text{Vect}(E_k ; k \leq j).$$

En particulier, pour tout entier $j < 1$, cet espace vectoriel est réduit au vecteur nul.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Dire que F est *stable* par M signifie que F est stable par f_M , ce qui s'écrit

$$\forall U \in F, \quad MU \in F.$$

Pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[X, Y] = XY - YX$. C'est le *crochet de Lie* du couple de matrices (X, Y) .

Si $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $[\mathcal{U}]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les éléments de la forme $[X, Y]$ lorsque le couple (X, Y) décrit $\mathcal{U}^2$.

Dire que $\mathcal{U}$ est une *algèbre de Lie* signifie que $[\mathcal{U}]$ est inclus dans $\mathcal{U}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose alors

$$L_A(M) = A \times M, \quad D_A(M) = M \times A, \quad \phi_A(M) = [M, A].$$

Les applications L_A , D_A et ϕ_A sont alors trois endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I — résultats préliminaires

Question 1. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E . On suppose que f et g commutent.

Montrer que tout espace propre de f est stable par g .

Question 2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E .

On suppose qu'il existe une fonction $\mu : E \setminus \{0_E\} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) = \mu(x)x.$$

Montrer que la fonction μ est constante.

Indication. Pour tout couple (x, y) d'éléments non nuls de E , on prouvera l'égalité $\mu(x) = \mu(y)$ en séparant le cas où x et y sont colinéaires.

Question 3. Vérifier que D_A et L_A commutent. En déduire que L_A et ϕ_A commutent.

Question 4. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $D_A^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} L_A^j \circ \phi_A^{i-j}$.

Partie II — un théorème de stabilité

Dans cette partie, on considère deux algèbres de Lie $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ incluses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

On considère un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On suppose que pour toute matrice M de $\mathcal{V}$, la colonne X est un vecteur propre de M et on note $\lambda(M)$ la valeur propre associée.

Le but de cette partie est de prouver que pour toute matrice A de $\mathcal{U}$ et toute matrice M de $\mathcal{V}$, le vecteur colonne AX appartient à l'espace propre $E_{\lambda(M)}(M)$.

On fixe une matrice A de $\mathcal{U}$.

On définit une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ en posant $X_0 = X$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = AX_k.$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{V}$, on définit une suite complexe $(\lambda_k(M))_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $\lambda_0(M) = \lambda(M)$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{k+1}(M) = \lambda_k([M, A]).$$

Question 5. Montrer que la fonction λ , définie de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{C}$, est linéaire.

Question 6. Pour tout élément M de $\mathcal{V}$, montrer que la matrice $[M, A]$ est un élément de $\mathcal{V}$.

Question 7. Soit $M \in \mathcal{V}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$MX_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j.$$

On pourra utiliser le calcul de la question 4.

Question 8. Soit $M \in \mathcal{V}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$[M, A]X_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j.$$

Question 9. Montrer que l'ensemble des entiers j pour lesquels la famille $(X_0, \dots, X_j)$ est libre possède un plus grand élément.

Ce plus grand élément est noté q .

On note G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(X_0, \dots, X_q)$.

Question 10. Soit $M \in \mathcal{V}$. Montrer que G est stable par M , par A et par $[M, A]$.

On note c_G l'endomorphisme de G induit par l'endomorphisme $U \mapsto [M, A] \times U$.

Question 11. Calculer la trace de c_G .

Question 12. Écrire la matrice de c_G dans la base $(X_0, \dots, X_q)$ de G .

Question 13. En déduire la valeur de $\lambda([M, A])$.

Question 14. Conclure.

Partie III — matrices triangulaires supérieures strictes

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\mathcal{T}_k$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout couple (i, j) d'indices entre 1 et n tels que $i + k > j$, on ait $m_{i,j} = 0$.

On notera en particulier que $\mathcal{T}_0$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments sont les matrices triangulaires supérieures et que $\mathcal{T}_1$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments sont les matrices triangulaires supérieures strictes. Pour finir, l'ensemble $\mathcal{T}_n$ est le singleton $\{0\}$.

Question 15. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que l'appartenance de M à $\mathcal{T}_k$ équivaut à

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_M(\mathbb{F}_j) \subset \mathbb{F}_{j-k}.$$

Question 16. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, prouver l'inclusion $[\mathcal{T}_k] \subset \mathcal{T}_{k+1}$.

Question 17. Montrer l'inclusion $[\mathcal{T}_0] \subset \mathcal{T}_1$.

Partie IV — vecteurs propres communs

Dans cette partie, on démontre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété C_n suivante : « Pour tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension n , pour toute partie $\mathcal{U}$ non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont les éléments commutent deux à deux, il existe dans E un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$ ».

Question 18. Démontrer la propriété C_1 .

Soit maintenant un entier $n \geq 2$. On suppose que les propriétés $C_1, \dots, C_{n-1}$ sont vraies. On considère un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension n et on se donne une partie $\mathcal{U}$ non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont les éléments commutent deux à deux.

Question 19. On suppose qu'il existe dans $\mathcal{U}$ un élément f non colinéaire à Id_E .

Rappeler pourquoi f possède au moins une valeur propre λ et montrer qu'il y a dans $E_\lambda(f)$ au moins un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$.

Question 20. Conclure.

Partie V — algèbres de Lie résolubles

Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dire que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie *résoluble de longueur p* signifie qu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_p$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \dots \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad [\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}.$$

Le but de cette dernière partie est de prouver que l'algèbre de Lie $\mathcal{U}$ est résoluble si et seulement si il existe une matrice P de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{U}$, la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure (en d'autres termes, les éléments de $\mathcal{U}$ sont *co-trigonalisables*).

Question 21. Montrer que $\mathcal{T}_0$ est une algèbre de Lie résoluble.

Question 22. Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur 1. Montrer que les éléments de $\mathcal{U}$ sont co-trigonalisables. On pourra raisonner par récurrence sur n en s'appuyant sur les résultats de la partie IV.

Pour la suite, on se donne une algèbre de Lie $\mathcal{U}$ résoluble de longueur $p > 1$. On lui associe alors des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_p$ conformément à la définition du début de la partie V.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur strictement inférieure à p , les éléments de cette algèbre de Lie sont co-trigonalisables.

Question 23. Montrer que les éléments de $\mathcal{U}_1$ possèdent un vecteur propre commun.

On note X un tel vecteur propre. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui s'écrivent comme produit fini d'éléments (non nécessairement distincts) de $\mathcal{U}$ — cet ensemble contient notamment la matrice I_n . On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ engendré par $\{AX ; A \in \mathcal{A}\}$.

Question 24. Montrer que E est stable par tous les éléments de $\mathcal{U}$.

Question 25. Montrer que tous les éléments non nuls de E sont des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{U}_1$.

Question 26. On considère deux éléments M et N de $\mathcal{U}$. On note c l'endomorphisme $Y \mapsto [M, N]Y$ de E .

Montrer que c est un multiple de Id_E et que sa trace est nulle.

Question 27. Que peut-on en déduire?