**Dénombrement — exercices corrigés**

**Exercice 1.**

**1.** Choisir un couple $(\mathrm{A},\mathrm{B})$ de parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ revient à choisir, pour chaque élément $e$ de E, l'une des trois options suivantes

- $e \in \mathrm{A}$ et $e \in \mathrm{B}$ ;
- $e \notin \mathrm{A}$ et $e \in \mathrm{B}$ ;
- $e \notin \mathrm{A}$ et $e \notin \mathrm{B}$.

Il y a donc $3^n$ tels couples.

---

**2.** Le raisonnement est le même, sauf que les trois options sont les suivantes

- $e \in \mathrm{A}$ et $e \notin \mathrm{B}$ ;
- $e \notin \mathrm{A}$ et $e \in \mathrm{B}$ ;
- $e \notin \mathrm{A}$ et $e \notin \mathrm{B}$.

Il y a là aussi $3^n$ tels couples.

On peut aussi remarquer que l'application $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto (\mathrm{A},\bar{\mathrm{B}})$ réalise une bijection de l'ensemble des solutions de la première question sur l'ensemble des solutions de la deuxième question.

---

**3.** Les partitions de E en deux sous-ensembles sont exactement les paires $\{\mathrm{A},\bar{\mathrm{A}}\}$, où A décrit les parties de E différentes de E et de $\varnothing$.
Il y a $2^n - 2$ couples de la forme $(\mathrm{A},\bar{\mathrm{A}})$, mais pour tout A, le couple $(\mathrm{A},\bar{\mathrm{A}})$ produit la même partition que $(\bar{\mathrm{A}},\mathrm{A})$ (et une partition différente de celles que les autres couples produisent). Le nombre de partitions en deux sous-ensemble s'obtient donc en divisant le nombre de couples par 2.

Il y a donc $2^{n-1} - 1$ partitions de E en deux sous-ensembles.

---

**3.** Considérons une partition de E en $p$ sous-ensembles. Celle-ci s'écrit sous la forme $\mathrm{P} = \{\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_p\}$ pour un certain $p$-uplet $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_p)$ de parties non vides de E disjointes de réunion E.
À un tel $p$-uplet Q, on associe la fonction $\varphi_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to [\![1,p]\!]$ définie par $\varphi_\mathrm{A}(e) = k \iff e \in \mathrm{A}_k$. On a alors

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{A}_k = \{e \in \mathrm{E}\ ;\ \varphi_\mathrm{A}(e) = k\}.$$

Chaque $\mathrm{A}_k$ étant non vide, la fonction $\varphi_\mathrm{A}$ est surjective.

Réciproquement, si $\varphi : \mathrm{E} \to [\![1,p]\!]$ est une fonction surjective, on lui associe un $p$-uplet $\mathrm{A}_\varphi = (\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_p)$ de parties non vides de E en posant

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{A}_k = \{e \in \mathrm{E}\ ;\ \varphi_\mathrm{A}(e) = k\}.$$

De plus, ces parties réalisent une partition de E.

L'application $\mathrm{A} \mapsto \varphi_\mathrm{A}$ est donc une bijection de l'ensemble des $p$-uplets de parties non vides de E disjointes de réunion E sur l'ensemble des surjections de E vers $\{1,p\}$.

Par ailleurs, chaque partition provient de $p!$ différents $p$-uplets, si bien que le nombre de partitions de E en $p$ sous-ensembles vaut $\mathrm{S}(n,p)/p!$

---

**Exercice 2.**

**1.** L'escalier d'une marche admet uniquement la descente $(1)$.
Pour l'escalier de deux marches, il y a les descentes $(1,1)$ et $(2)$.
Pour l'escalier de trois marches, il y a les descentes $(1,1,1)$, $(1,2)$ et $(2,1)$.

On obtient donc $(d_1,d_2,d_3) = (1,2,3)$.

---

**2.** Les descentes d'un escalier de $n$ marches sont de deux types :

- celles qui terminent par un pas de deux marches ; celles-ci ont alors débuté par une descente des $n-2$ premières marches ; il y en a donc $d_{n-2}$ ;
- celles qui terminent par un pas d'une marche ; celles-là ont alors débuté par une descente des $n-1$ premières marches ; il y en a donc $d_{n-1}$.

Ce partitionnement donne l'égalité $d_n = d_{n-2} + d_{n-1}$.

---

**3.** Cette relation est encore valable pour $n = 2$. La valeur conventionnelle de $d_0$ a été bien choisie. La relation de récurrence admet pour équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$. Ses racines sont $\varphi$ et $\theta$. Il existe donc des constantes $a$ et $b$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = a\varphi^n + b\theta^n.$$

Les valeurs de $d_0$ et $d_1$ donnent

$$a + b = 1 \qquad \text{et} \qquad a\varphi + b\theta = 1 \qquad \text{donc} \qquad a = \frac{1-\theta}{\varphi-\theta} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1-\varphi}{\theta-\varphi}.$$

Les relations coefficients donnent notamment $\theta + \varphi = 1$. Un calcul donne $\varphi - \theta = \sqrt{5}$. Il reste donc $a = \varphi/\sqrt{5}$ et $b = -\theta/\sqrt{5}$ et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \frac{\varphi^{n+1} - \theta^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

---

**4.** Notons $\mathrm{D}_n$ l'ensemble de toutes les descentes d'un escalier de $n$ marches. Si l'on note $k$ le nombre de pas de deux marches, les valeurs possibles pour $k$ sont les entiers compris entre 0 et $n/2$ et le nombre de pas d'une marche vaut $n - 2k$, si bien qu'il y a $n - k$ pas au total.

Pour une valeur fixée de $k$, une descente s'écrit $(1, \dots 1, 2, \dots, 2)$ avec $n-2k$ occurrences du chiffre 1 et $k$ occurrences du chiffre 2, et les autres descentes sont les permutations de cette liste. Chacune de ces permutations s'obtient en choisissant les $k$ positions des chiffres 2 parmi les $n - k$ positions dans la liste.

Il y a donc $\binom{n-k}{k}$ descentes de l'escalier de $n$ marches si l'on impose que le nombre de pas de deux marches soit égal à $k$.

Ces différents cas partitionnent l'ensemble de toutes les descentes d'un escalier de $n$ marches. Le nombre total de descentes vaut donc

$$d_n = \sum_{k=0}^{n//2} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \qquad \text{les termes ajoutés sont nuls.}$$

Cette formule s'écrit $1 = 1$ dans le cas $n = 0$ donc elle est encore valable.

---

**5.** Voici pour commencer une version itérative.

```python
def d(n):
    """ -> Nombre de descentes d'un escalier de n marches """
    d0, d1 = 1, 1
    for _ in range(n):
        d0, d1 = d1, d0+d1
    return d0
```

Voici ensuite une version récursive. On évite bien sûr le piège du `return d(n-1) + d(n-2)`, qui produirait une complexité déraisonnable.

```python
def fibo_rec(n, d0, d1):
    """ -> Terme d'indice n de la suite de Fibonacci
        de premiers termes d0 et d1.

        Le calcul est récursif.
    """
    if n == 0:
        return d0
    else:
        return fibo_rec(n-1, d1, d0+d1)

def d(n):
    """ -> Nombre de descentes d'un escalier de n marches """
    return fibo_rec(n, 1, 1)
```

---

**6.** Ajoutons une question subsidiaire : écrire une fonction qui renvoie l'ensemble de toutes les descentes d'un escalier de $n$ marches.

```python
def descentes(n):
    """ -> La liste des descentes d'un escalier de n marches. """
    d0 = []
    d1 = [[1]]
    if n == 0:
        return d0
    else:
        for _ in range(n-1):
            d2 = [descente+[2] for descente in d0] +
                 [descente+[1] for descente in d1]
            d0, d1 = d1, d2
    return d1
```

---

**Exercice 3.** Considérons un ensemble E de cardinal $(n+1)$ et un ensemble F de cardinal $n$.

Soit $a$ une surjection de E vers F. L'inégalité $\mathrm{Card}(\mathrm{E}) > \mathrm{Card}(\mathrm{F})$ empêche $a$ d'être injective : il existe au moins un élément de F qui possède au moins deux antécédents. Étant donné un tel élément de F, les $n-1$ autres éléments de F ont au moins $n-1$ antécédents au total, si bien que cet élément ne peut pas avoir plus de deux antécédents. Il y a donc un élément qui possède exactement deux antécédents et les autres en ont un seul.

Réciproquement, si $a$ est une application de E vers F pour laquelle un élément de F possède deux antécédents et les autres en ont un, alors $a$ est surjective.

Pour choisir une telle application, on a donc les choix suivants à effectuer :
- un élément $f$ de F (il y a $n$ choix pour $f$) ;
- deux éléments $e_1$ et $e_2$ de E (les antécédents de $f$ par $a$ ; il y a $\binom{n+1}{2}$ choix pour $\{e_1, e_2\}$) ;
- une bijection entre $\mathrm{E} \setminus \{e_1, e_2\}$ et $\mathrm{F} \setminus \{f\}$ (il y a $(n-1)!$ choix pour cette bijection).

Le nombre de surjections de E vers F vaut finalement $n \times \binom{n+1}{2}(n-1)!$, c'est-à-dire $n!\binom{n+1}{2}$.

---

**Exercice 4. a.** L'application $\varphi$ est bien définie de E vers F. On peut aussi définir

$$\psi : (b_1, b_2, \ldots, b_p) \mapsto (b_1 - 1, b_2 - 2, \ldots, b_p - p)$$

de F vers E. On remarque alors les égalités $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Les applications $\varphi$ et $\psi$ sont donc bijectives, réciproques l'une de l'autre.

---

**b.** On en déduit que le cardinal de E est égal à celui de F, c'est-à-dire $\binom{n+p}{p}$.

---

**c.** On peut définir l'application suivante de G vers E

$$a : (g_1, \ldots, g_{p+1}) \mapsto (g_1, g_1 + g_2, \ldots, g_1 + \cdots + g_p)$$

et l'application suivante de E vers G

$$b : (e_1, \ldots, e_p) \mapsto (e_1, e_2 - e_1, \ldots, e_p - e_{p-1}, n - e_p).$$

On peut alors vérifier les égalités $a \circ b = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $b \circ a = \mathrm{Id}_\mathrm{G}$. Les applications $a$ et $b$ sont donc bijectives, inverses l'une de l'autre.

On en déduit en particulier que le cardinal de G vaut $\binom{n+p}{p}$.

---