

Exercice 1. (*) On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement « *Le n -ième lancer a donné pile.* » et on note F_n son événement contraire.

Pour tout entier n , on note D_n l'événement « *Lors des n premiers lancers, il n'y a pas eu deux lancers consécutifs qui aient donné pile.* » La probabilité de l'événement D_n est notée d_n .

a. Calculer d_0 , ainsi que d_1 et d_2 .

b. Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

c. En déduire une expression de d_n en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 2. (*) On se place dans le même contexte que l'exercice précédent. Albertine et Barnabé jouent à un jeu basé sur l'observation des résultats des lancers de la pièce. Albertine gagne si une succession (pile, pile, face) apparaît avant qu'une succession (face, pile, pile) n'apparaisse. Barnabé gagne si une succession (face, pile, pile) apparaît avant qu'une succession (pile, pile, face) n'apparaisse. Si aucune de ces successions ne se produit, aucun des deux ne gagne.

Le but de cet exercice est de déterminer lequel des deux personnages a le plus de chances de gagner.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note N_n l'événement « *Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue des n premiers lancers.* »

Calculer $\mathbb{P}(N_1)$ et $\mathbb{P}(N_2)$.

b. Pour tout entier $n \geq 3$, prouver l'égalité $\mathbb{P}(N_n) = 2^{-n} + d_n$.

c. En déduire que la probabilité d'un match nul est nulle.

d. Calculer la probabilité de victoire d'Albertine. En déduire celle de Barnabé. Commenter.

Exercice 3. (*) Montrer qu'en posant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la loi d'une variable aléatoire discrète X . Possède-t-elle une espérance ?

Exercice 4. (*) a. Montrer l'existence d'une constante c telle qu'on définisse la loi d'une variable aléatoire discrète X en posant $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k^3 + 1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que X possède une espérance, mais pas de variance.

Exercice 5. (*) Montrer que si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors la valeur maximale de $\mathbb{P}(X = k)$ est atteinte pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Exercice 6. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(1/(X+1))$ et calculer sa valeur.

Exercice 7. (*) Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . Prouver l'existence de $\mathbb{E}(1/X)$ et calculer sa valeur.

Exercice 8. ()** Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Z sachant $[X = k]$ soit uniforme sur $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$.

a. Donner $\mathbb{P}_{[X=k]}(Z = j)$ pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

b. Déterminer la loi de Z (sans chercher à simplifier les sommes obtenues).

c. (***) Prouver l'existence de $\mathbb{E}(Z)$ et calculer sa valeur.

Exercice 9. (*) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note Z le maximum des nombres X et Y .

- Justifier que Z est une variable aléatoire. Déterminer sa loi et son espérance.
- Déterminer les lois de $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

Exercice 10. ()** Soit p dans $]0, 1[$. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$.

- Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction génératrice de S_n . En déduire sa loi.
- Déterminer la loi de T_1 sachant $[S_2 = k]$. Interprétation.
- Pour tout $n \geq 2$, calculer l'espérance de $\frac{n-1}{S_n-1}$.

Exercice 11. (*) On considère deux variables X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

- Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
- Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = n]$. Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 12. (*) On considère deux variables aléatoires X et Z . On suppose que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel n la loi de X sachant $[Z = n]$ est $\mathcal{B}(n, p)$.

Montrer que X suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

Exercice 13. ()** Soient a et b dans $]0, +\infty[$ avec $a + b = 1$.

- Montrer que la série $\sum \binom{2n}{n} a^n b^n$ converge sauf si $(a, b) = (1/2, 1/2)$.

On se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe. On est initialement en 0. À un instant donné, la probabilité d'aller à droite vaut a et la probabilité d'aller à gauche vaut b . On note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n . On note p_n la probabilité d'être de retour en 0 pour la première fois à l'instant n .

On pose $R(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $P(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.

- Montrer que les fonctions R et P sont définies sur $] -1, 1[$.
- Pour tout $t \in] -1, 1[$, justifier l'égalité $R(t) = 1 + R(t)P(t)$.
- On note A l'événement « On revient au moins une fois en 0. ». Montrer que $\mathbb{P}(A)$ vaut 1 si, et seulement si, on est dans le cas $(a, b) = (1/2, 1/2)$.

Exercice 14. (*) Soit X une variable aléatoire strictement positive. prouver l'inégalité $\mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 2$.

Exercice 15. ()** Soient X et Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes, de même loi.

Prouver l'inégalité $\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$.

Exercice 16. (*)** Soient X_0 et Y_0 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

On suppose que $X + Y$ suit la même loi que $X_0 + Y_0$. Montrer que X et Y suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.