PC* — mathématiques **jeudi 21 mars 2019**
Devoir surveillé n° 7bis **durée : 4 heures**

Les polynômes de Hermite

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{H}_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n} \times \dfrac{f^{(n)}}{f}$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

Première partie

I.1. Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. On admet que I_0 vaut $\sqrt{\pi}$. Que vaut I_1 ?

I.2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer la relation $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} \times \mathrm{I}_n$. On s'appuiera sur une intégration par parties soigneusement menée. En déduire une expression de I_n pour tout n dans $\mathbb{N}$. On distinguera les indices pairs et les indices impairs et on exprimera le résultat final à l'aide de factorielles lorsque ça s'impose.

I.3. Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, la fonction $\mathrm{P} \times f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.4. Montrer que la formule suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2, \quad (\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

La norme euclidienne associée à ce produit scalaire sera notée $\|\ \|$.

I.5. Pour tout (i, j) dans $\mathbb{N}^2$, calculer le produit scalaire $(\mathrm{X}^i|\mathrm{X}^j)$?

I.6. À l'aide du procédé de Gram-Schmidt, trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Deuxième partie

II.1. Pour tout entier naturel p, montrer l'identité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(p+2)}(x) + 2x f^{(p+1)}(x) + 2(p+1) f^{(p)}(x) = 0.$$

En déduire l'égalité $2\mathrm{H}_{p+2}(x) - 2x\mathrm{H}_{p+1}(x) + (p+1)\mathrm{H}_p(x) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

II.2. Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction H_n est polynomiale. Montrer de plus que pour tout entier naturel n, le polynôme H_n est unitaire et de degré n.

II.3. Calculer H_k pour tout indice k compris entre 0 et 3. Comparer ces polynômes avec ceux trouvés à la question **I.6**.

II.4. Pour tout entier k strictement positif, montrer que H_k et H_0 sont orthogonaux.

II.5. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\mathrm{H}'_p = p\mathrm{H}_{p-1}$.

II.6. Soient m et n deux entiers strictement positifs.

a. Montrer l'égalité $(\mathrm{H}_n|\mathrm{H}_m) = \dfrac{m}{2}(\mathrm{H}_{n-1}|\mathrm{H}_{m-1})$.

b. En déduire que la famille $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

c. Calculer la norme de H_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

II.7. Soit un entier p strictement positif. Montrer que le polynôme H_p appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{p-1}[\mathrm{X}]$.

II.8. Soit un entier p strictement positif. On veut montrer que le polynôme H_p est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples.

Notons r le nombre de racines réelles de H_p ayant un ordre de multiplicité impair.

a. En utilisant l'égalité $(\mathrm{H}_k|\mathrm{H}_0) = 0$, montrer que r n'est pas nul.

On suppose maintenant que r est strictement inférieur à p. On note $x_1, \ldots, x_r$ les racines réelles de H_p ayant un ordre de multiplicité impair, notée dans l'ordre croissant. On pose alors

$$\mathrm{Q} = \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X} - x_i).$$

b. Montrer que la fonction $\mathrm{Q} \times \mathrm{H}_p$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que le produit scalaire $(\mathrm{Q}|\mathrm{H}_p)$ est nul.

d. Conclure.

II.9. Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide de la première identité obtenue en **II.1**, montrer l'égalité $\mathrm{H}_p'' - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_p' + 2p\mathrm{H}_p = 0$.

II.10. Soit $p \in \mathbb{N}$. On veut montrer que le seul polynôme Q unitaire vérifiant l'égalité $\mathrm{Q}'' - 2\mathrm{X}\mathrm{Q}' + 2p\mathrm{Q} = 0$ est le polynôme H_p.
On considère donc un tel polynôme Q.

a. Montrer que Q est de degré p.

b. Montrer que le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{H}_p - \mathrm{Q}$ vérifie l'égalité $\mathrm{R}'' - 2\mathrm{X}\mathrm{R}' + 2p\mathrm{R} = 0$ et que son degré est différent de p.

c. Conclure.

Troisième partie

Pour le reste du problème, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

On note U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathrm{U} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}.$$

On définit sur l'ensemble U la fonction F par la formule suivante

$$\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln(x_j - x_i).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Ses dérivées partielles d'ordre 1 sont notées $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_n}$.

Dans cette partie, on montre que la fonction F possède un unique point critique et que celui-ci a pour coordonnées les n racines du polynôme H_n.

III.1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

III.2. On fixe un élément $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de U et on considère le polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a_1)(\mathrm{X}-a_2)\ldots(\mathrm{X}-a_n)$.

a. Pour tout x réel distinct des nombres $a_1, \ldots, a_n$, montrer l'égalité suivante

$$\frac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}.$$

b. Pour tout indice i dans $[\![1, n]\!]$, exprimer la limite de $\dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)} - \dfrac{1}{x - a_i}$ quand x tend vers a_i en s'appuyant sur la formule précédente.

c. Trouver une autre expression cette limite précédente en s'appuyant cette fois sur un développement limité.

d. Déduire des calculs précédents la formule suivante

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{\mathrm{P}''(a_i)}{2\mathrm{P}'(a_i)}.$$

III.3. Exprimer les dérivées partielles de la fonction F.

III.4. Montrer que si a est un point critique de F, alors ses coordonnées $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de $2\mathrm{XP}' - \mathrm{P}''$. En déduire que le polynôme $2\mathrm{XP}' - \mathrm{P}''$ est proportionnel à P et préciser le coefficient de proportionnalité.

III.5. Montrer finalement que la fonction F possède exactement un point critique a et que les coordonnées de ce point critique sont les racines du polynôme H_n.

Quatrième partie

Dans cette partie, on explore le concept de fonction convexe.

On rappelle qu'une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est une partie C telle que

$$\forall (x, y, t) \in \mathrm{C} \times \mathrm{C} \times [0, 1], \quad tx + (1-t)y \in \mathrm{C}.$$

On rappelle aussi que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathrm{C} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Dire que φ est une *fonction convexe* sur C signifie que

$$\forall (x, y, t) \in \mathrm{C} \times \mathrm{C} \times [0, 1], \quad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

IV.1. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On suppose que la fonction φ'' est positive.
Montrer que la fonction φ est convexe.

IV.2. Montrer que les fonctions $t \mapsto -\ln(t)$ et $t \mapsto t^2$ sont convexes sur des intervalles à préciser.

IV.3. Montrer que l'ensemble U de la partie III est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

IV.4. Montrer que la fonction F de la partie III est convexe sur U.

Pour la fin de cette partie, on note $a = (a_1, \ldots, a_n)$ le point critique de F.
On fixe un élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de U et on définit une fonction Ψ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par la formule

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi(t) = \mathrm{F}(tx + (1-t)a).$$

IV.5. Pour tout $t \in]0, 1]$, prouver la majoration $\dfrac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} \leqslant \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.

IV.6. Exprimer la dérivée de Ψ sur $[0, 1]$ et en déduire le signe de $\Psi'(0)$.

IV.7. Montrer finalement que F admet un minimum en a.

Cinquième partie

Dans cette partie, on calcule la valeur du minimum $\mathrm{F}(a)$.

V.1. Exprimer le minimum de la fonction F dans le cas où n vaut 2.

V.2. On suppose maintenant que n est supérieur ou égal à 3. On note $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les racines du polynôme H_{n-1} et $z_1, \ldots, z_{n-2}$ les racines du polynôme H_{n-2}.

On rappelle la relation $2\mathrm{H}_n - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1} + (n-1)\mathrm{H}_{n-2} = 0$ obtenue en **II.1**.

a. Démontrer les égalités suivantes

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_n(y_i)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_{n-2}(y_i)\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_{n-2}(y_i)\right| = \left|\prod_{j=1}^{n-2} \mathrm{H}_{n-1}(z_j)\right|.$$

En déduire l'égalité

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_n(y_i)\right| = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^{n-1}}{2^{n(n-1)/2}}.$$

b. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, montrer l'égalité $|\mathrm{H}_n'(a_i)| = \left|\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_i)\right|$.

On note p_n le produit $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Exprimer $(p_n)^2$ en fonction du produit $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{H}_n'(a_i)$.

c. À l'aide de l'égalité $\mathrm{H}_n' = n\mathrm{H}_{n-1}$, montrer l'égalité $(p_n)^2 = \dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^{n-1} \cdot n^n}{2^{n(n-1)/2}}$.

d. Déterminer les coefficients devant X^{n-1} et X^{n-2} dans le développement du polynôme H_n. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^{n} a_i$, de $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$, puis de $\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2$.

e. En déduire la valeur du minimum de F sur U.
