Chapitre 17 — intégrales dépendant d'un paramètre

1 Théorème de convergence dominée : révisions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_{\mathrm{I}} f_n$ converge vers $\int_{\mathrm{I}} f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

2 Théorème d'intégration terme à terme : révisions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle I.
3. La somme de cette série de fonctions, notée f, est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.
4. La série $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)| \; \mathrm{d}t$ est convergente.

Conclusion : la fonction f est intégrable sur l'intervalle I et son intégrale est donnée par
$$\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \; \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t) \; \mathrm{d}t.$$

3 Théorème de continuité sous l'intégrale

Soient I et J deux intervalles (l'intervalle I est l'ensemble des paramètres ; l'intervalle J est celui sur lequel on intègre). Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
2. Pour toute valeur du paramètre x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
3. Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, intégrable sur J et indépendante du paramètre x vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \forall t \in \mathrm{J}, \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors on peut affirmer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{\mathrm{J}} f(x,t) \; \mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Version assouplie : on peut se contenter de prouver que F est définie et continue sur chaque segment inclus dans I.

Exemple : la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \; \mathrm{d}t$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4 Théorème de dérivation sous l'intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour toute valeur du paramètre x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle J.
2. Pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.
3. Pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle J.
4. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle J (et indépendante du paramètre x) vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \forall t \in \mathrm{J}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{\mathrm{J}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et sa dérivée s'obtient en dérivant sous l'intégrale
$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Version assouplie : on peut se contenter d'appliquer ce théorème sur $\mathrm{K} \times \mathrm{J}$ pour tout segment K inclus dans I.

Généralisation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Exemple de la fonction Γ (méthode par récurrence).

Exercice 1. (*) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$, telle que $f(0) \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t$. On note sa valeur I_n.

Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. (***) Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,d],\mathbb{C})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose
$$\tilde{g}(t) = \int_0^d t\mathrm{e}^{-tx} g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\tilde{g}(t)$ tend vers $g(0)$ quand t tend vers $+\infty$.

On utilisera la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 3. (**) On considère une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ absolument convergente et on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 4. (**) On pose $a_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et calculer sa somme.

Préciser ensuite le rayon de convergence de cette série entière.
