

Séries semi-convergentes**Calculatrices autorisées****Définitions et notations**

On rappelle le résultat suivant : toute partie X *non vide* de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, que l'on note $\min(X)$.

On rappelle les points suivants du langage Python :

- La liste contenant l'unique élément a est notée $[a]$.
- Le couple (a, b) sera représenté par la liste $[a, b]$.
- Pour ajouter l'élément x en queue de la liste tab , on invoque `tab.append(x)`

On dira qu'une série à terme réels est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2) .

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

Partie I — Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x . Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $u_n = (-1)^n/n$. On se propose de définir une bijection s de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x.$$

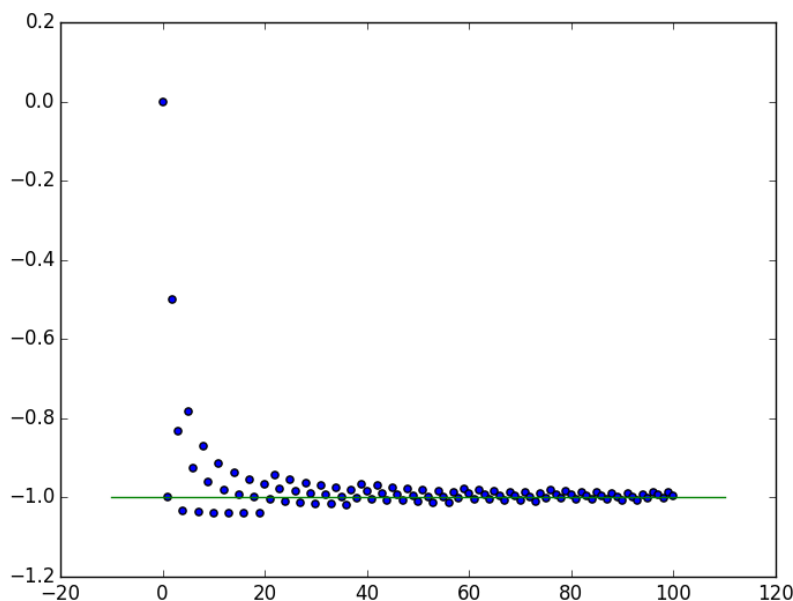
I.A. On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n \geq 0}$, $(q_n)_{n \geq 0}$ et $(s_n)_{n \geq 1}$ et une suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$;
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, si $S_n > x$, alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ sinon $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$;
- $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ dans les deux cas.

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie (si possible en temps linéaire) la liste $[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

I.A.2. En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle affiche le dessin simultané de la liste des points de coordonnées (n, S_n) pour n variant de 1 à 100 et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient (pour le choix $x = -1$) le dessin suivant



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B. À partir de maintenant, l'entier s_n est noté $s(n)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver les propriétés suivantes :

- (i) $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$;
- (ii) $p_n + q_n = n$;
- (iii) $S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}$.

En déduire que la fonction s est injective.

I.C. Dans cette question, on prouve que la fonction s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

I.C.1. Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2. On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

a. On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser I.C.1 pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b. Dédire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3. Justifier rapidement que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

I.C.4. Dédire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.

I.D. Dans cette question, on prouve que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

I.D.1. Pour tout entier naturel n , prouver que l'on a

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

I.D.2. En déduire que pour tout entier naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

I.D.3. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad p_n \geq 1, \quad q_n \geq 1.$$

I.D.4. Pour tout entier $n \geq n_0$, on note $v_n = \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et conclure.

I.E. Dans cette question, on précise l'ordre de grandeur de p_n et de q_n .

I.E.1. Démontrer l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

I.E.2. Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ .

I.E.3. On reprend les notations p_n et q_n de la question I.A.

a. Pour tout entier n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, prouver l'égalité

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b. En déduire la relation

$$S_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{n - p_n} \right) - \ln(2) + o(1).$$

c. En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n .

d. Déterminer la limite du quotient

$$\frac{|u_{s(1)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|}$$

quand n tend vers $+\infty$.

Partie II — Suites vérifiant les propriétés (P₁) et (P₂)

II.A. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Prouver que cette suite vérifie (P₁).

II.B. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.B.1. Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite finie.

II.B.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note

$$U_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

Pour tout N dans $\mathbb{N}$, prouver la relation

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P₂).

II.C. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge.

Caractériser les suites complexes qui vérifient (P₁).

II.D. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge. Pour cela, on définit par récurrence $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les conditions

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$;
- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} & \text{et } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geq p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} & \text{et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon ;} \end{cases}$
- $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n$ dans tous les cas.

II.D.1. Dans cette question seulement, on choisit $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{9}{4(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Déterminer les six premiers termes des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Écrire en Python une fonction `exemple` qui prend en argument l'entier n et retourne la liste

$$[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], \dots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]].$$

II.D.2. On revient au cas général.

a. Démontrer que pour tout entier naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par $n_0 = 0$ et pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$n_{k+1} = \min \{ n \in \mathbb{N} ; n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1} \}.$$

b. Calculer p_{n_k} et ε_{n_k} . Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ est divergente.

c. Déterminer n_1, n_2, n_3 pour l'exemple de la question II.D.1.

II.D.3. Dans cette question seulement, on choisit $a_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

a. Écrire en Python une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne la liste

$$[[0, n_0], \dots, [q, n_q]],$$

où q est le plus grand des entiers k tels que $n_k \leq n$. Par exemple, l'appel de `indexer(10000)` renvoie la liste

$$[[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 51]].$$

b. On considère un entier $k \geq 3$ tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'encadrement

$$k - 1 \leq A_{n_{k-1}} \leq k - 1 + \frac{1}{2^{k-1}n_k}.$$

En déduire l'inégalité $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c. Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de (k, n_k, n_{k+1}) . Pour tout entier $k \geq 3$, en déduire l'encadrement

$$\frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1} + 1}{n_k + 1} \right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right).$$

d. Pour tout entier $k \geq 3$, déduire des deux questions précédentes l'encadrement

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n_{k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n_k} \right).$$

e. En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $\ln(n_k) - 2^k$ puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n_k \sim_{k \rightarrow +\infty} C \times \exp(2^k).$$

En déduire l'équivalent

$$A_{n_k} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

puis

$$A_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle de limite nulle, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ est convergente.

a. Pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle de limite nulle, prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

b. En déduire que la série $\sum a_n$ converge absolument.

II.F. Soit maintenant une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour toute suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ implique la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

II.F.1. Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver que la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

II.F.3. Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4. Caractériser les suites vérifiant (P₂).