

# Barrières de potentiel

## I Barrière d'extension illimitée

1. Situation étudiée et modélisation
2. Recherche d'états stationnaires
3. Cas où le passage est permis classiquement ( $E > V_0$ )
4. Cas où le passage est interdit classiquement ( $E < V_0$ )
5. Analyse en termes de paquets d'ondes
6. Analogie avec les ondes électromagnétiques

## II Effet tunnel

1. Situation étudiée
2. Recherche d'états stationnaires
3. Interlude calculatoire
4. Coefficient de transmission
5. Approximation de la barrière épaisse
6. Barrière de forme quelconque

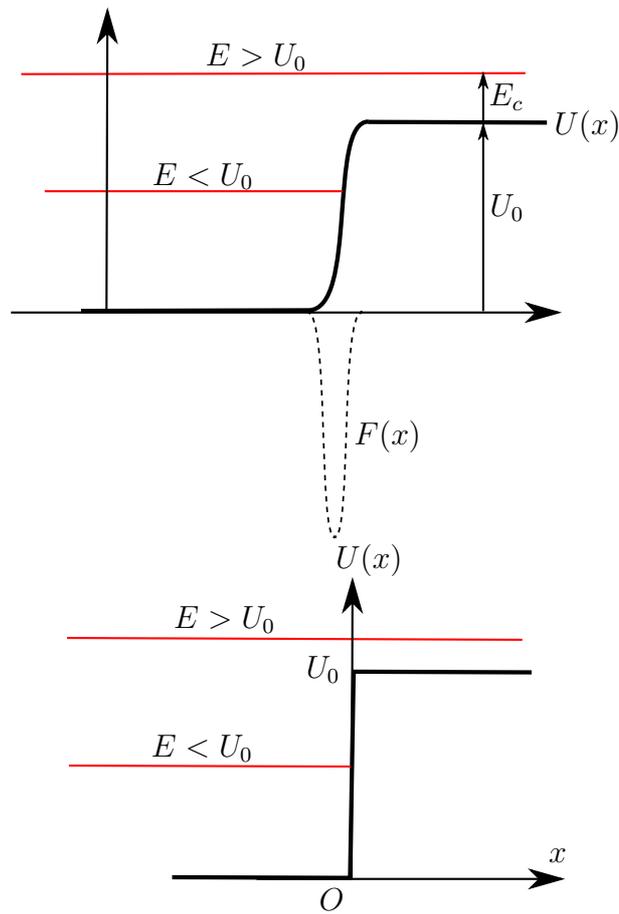


FIGURE 1 – Partie supérieure : barrière de potentiel à une dimension. Partie inférieure : modélisation par une fonction constante par morceaux.

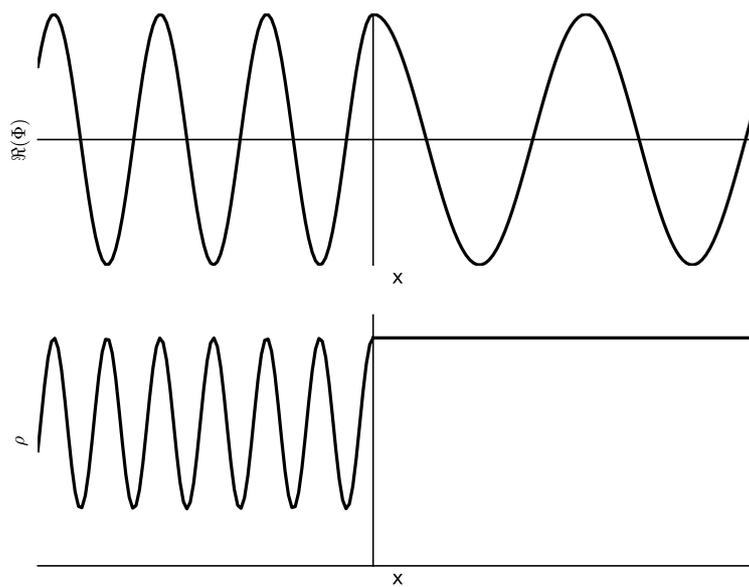


FIGURE 2 – Fonction d’onde et densité de probabilité dans une barrière de potentiel illimitée dans le cas  $E > V_0$ .

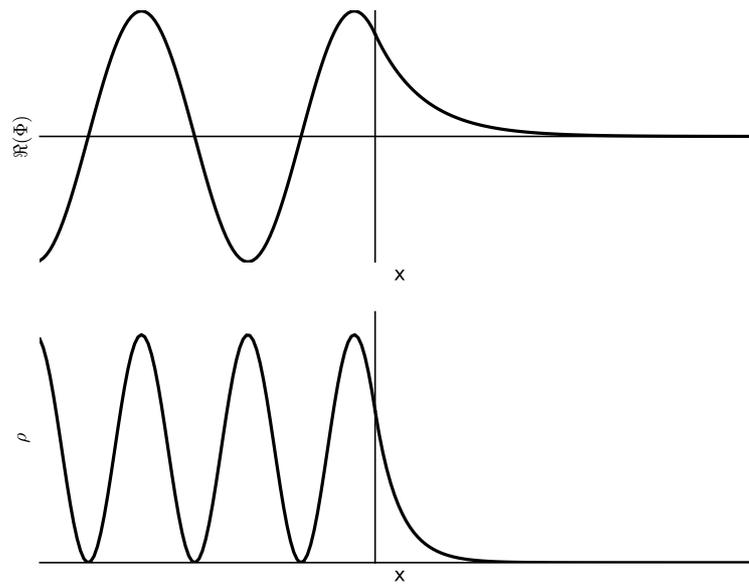


FIGURE 3 – Fonction d'onde et densité de probabilité dans une barrière de potentiel illimitée dans le cas  $E < V_0$ . Remarquer l'onde évanescente dans la zone classiquement interdite.

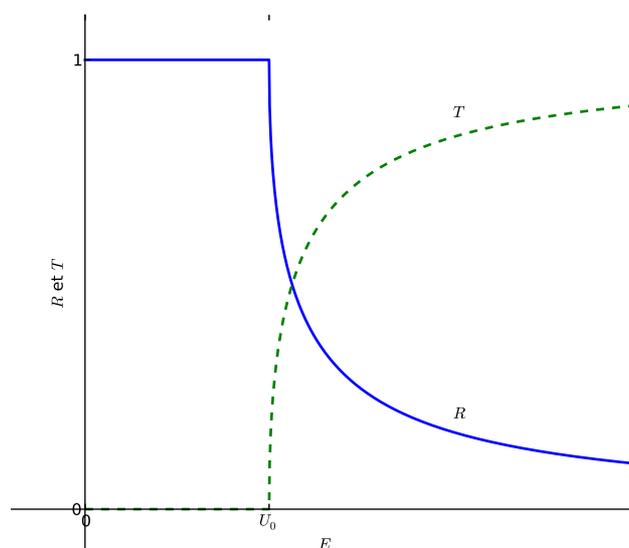


FIGURE 4 – Coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  produits par une barrière de potentiel illimitée. Pour  $E < V_0$ , la réflexion est totale.

Ondes électromagnétiques	Ondes de matière
Équation d'onde : d'Alembert ou autre	Équation de Schrödinger
Solution harmonique $E(M, t) = \mathcal{E}(M)e^{-i\omega t}$	États stationnaire $\Psi(M, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$ avec $\omega = E/\hbar$
Dans le vide pour $x < 0$ l'équation de d'Alembert devient $\Delta\mathcal{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathcal{E} = 0$ Solution en OPPHC : $\mathcal{E} = e^{ik_1x}$ avec $k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$	Pour $x < 0$ , $V = 0$ et l'équation de Schrödinger devient $\Delta\phi + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0$ Onde de De Broglie $\phi = e^{ik_1x}$ avec $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
Dans le plasma pour $x > 0$ , l'équation d'onde devient $\Delta\mathcal{E} + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}\mathcal{E} = 0$ . $k_2^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$	Pour $x > 0$ , $V = V_0$ et l'équation de Schrödinger devient $\Delta\phi + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\phi = 0$ . $k_2^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$
$E$ et $B$ sont continus. Par Maxwell-Faraday, $B$ est proportionnel à dérivée de $dE/dx$ .	$\phi(x)$ et $\phi'(x)$ sont continues.
indice optique $k_i = n_i \frac{\omega}{c}$ ou $n = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{k}{k_{\text{vide}}}$	$v_\varphi$ et $n$ sans intérêt, $n = \frac{k}{k_{\text{vide}}}$ pour le plaisir !
$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$	$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ $\tau = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$
$\omega > \omega_p$ : $k_2 \in \mathbb{R}$ , propagation dans le second milieu. Intensité $\langle R \rangle = \frac{ \mathcal{E} ^2}{2\mu_0} k$ $R = r^2$ et $T = \frac{k_2}{k_1} \tau^2$ avec $R + T = 1$	$E > V_0$ : onde de De Broglie dans le second milieu. densité de flux de probabilité $J = \frac{ \phi ^2 \hbar k}{m}$ $R = r^2$ et $T = \frac{k_2}{k_1} \tau^2$ avec $R + T = 1$
$\omega < \omega_p$ : $k_2 = jk_2'' \in j\mathbb{R}$ , onde évanescente $e^{-k_2''x}$ $\langle R_2 \rangle = 0$ : pas de transport d'énergie dans le plasma	$E < V_0$ onde évanescente $e^{-qx}$ qui correspond à $e^{ik_2x} \rightarrow e^{-qx}$ i.e. $k_2 \rightarrow iq$ . $J_2 = 0$ (par la formule hors programme), donc pas de flux de particule dans la barrière

TABLE 1 – Tableau d'analogies entre la réflexion d'une onde électromagnétique sur une interface vide-plasma (colonne de gauche) et la réflexion d'une onde de matière sur une marche de potentiel (partie droite)

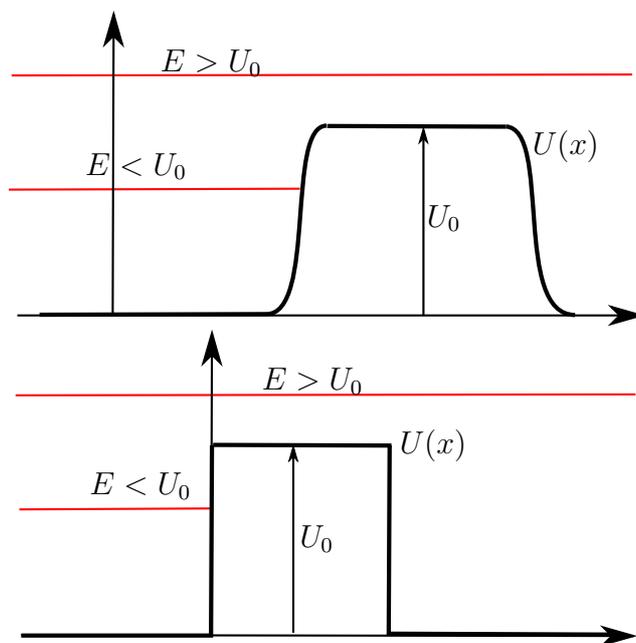


FIGURE 5 – Barrières de potentiel de largeur finie  $d$ .

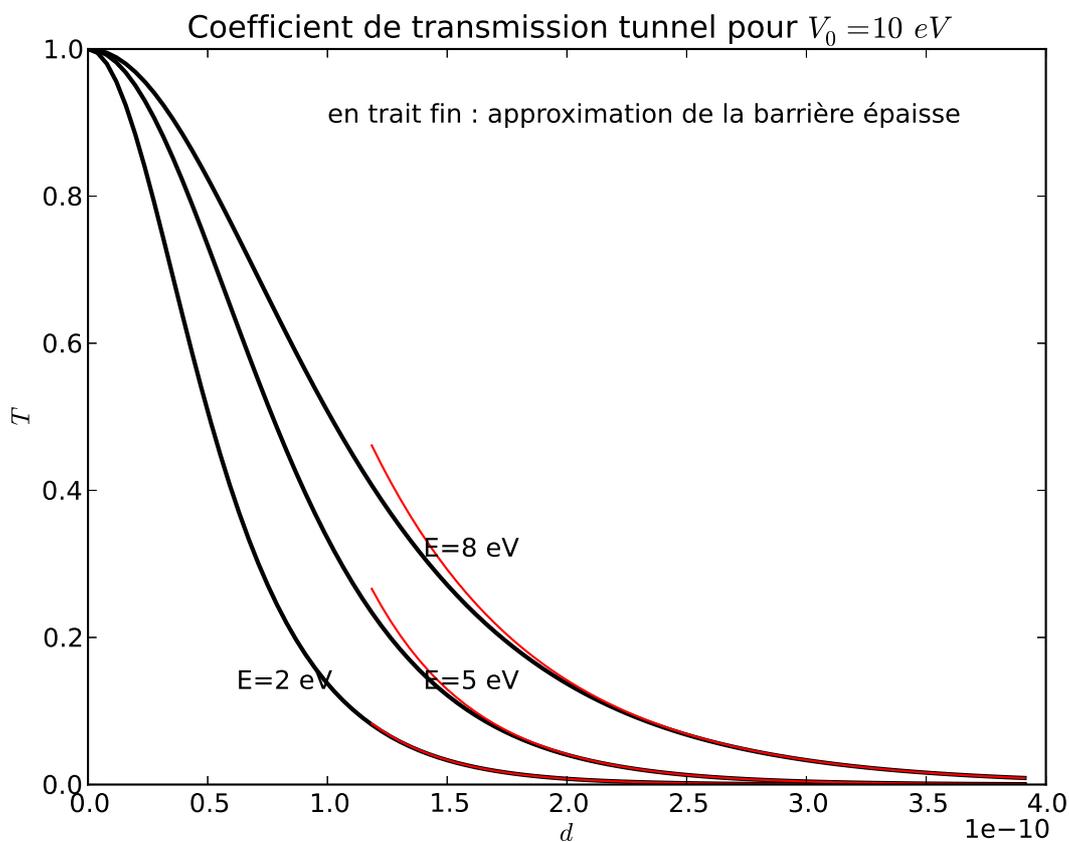


FIGURE 6 – Coefficient de transmission par effet tunnel  $T$  en fonction de l'épaisseur  $d$  de la barrière.

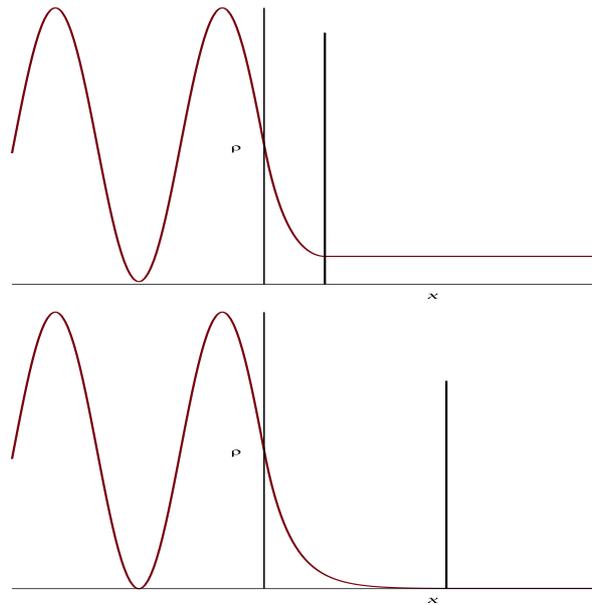


FIGURE 7 – Allure de la densité de probabilité pour deux valeurs de l'épaisseur  $d$  de la barrière. La trait vertical représente l'extrémité droite de la barrière. Pour  $d = 3 \cdot 10^{-10}$  m, l'onde évanescente  $y$  est considérablement affaiblie, conduisant à un coefficient de transmission très inférieur à 1.

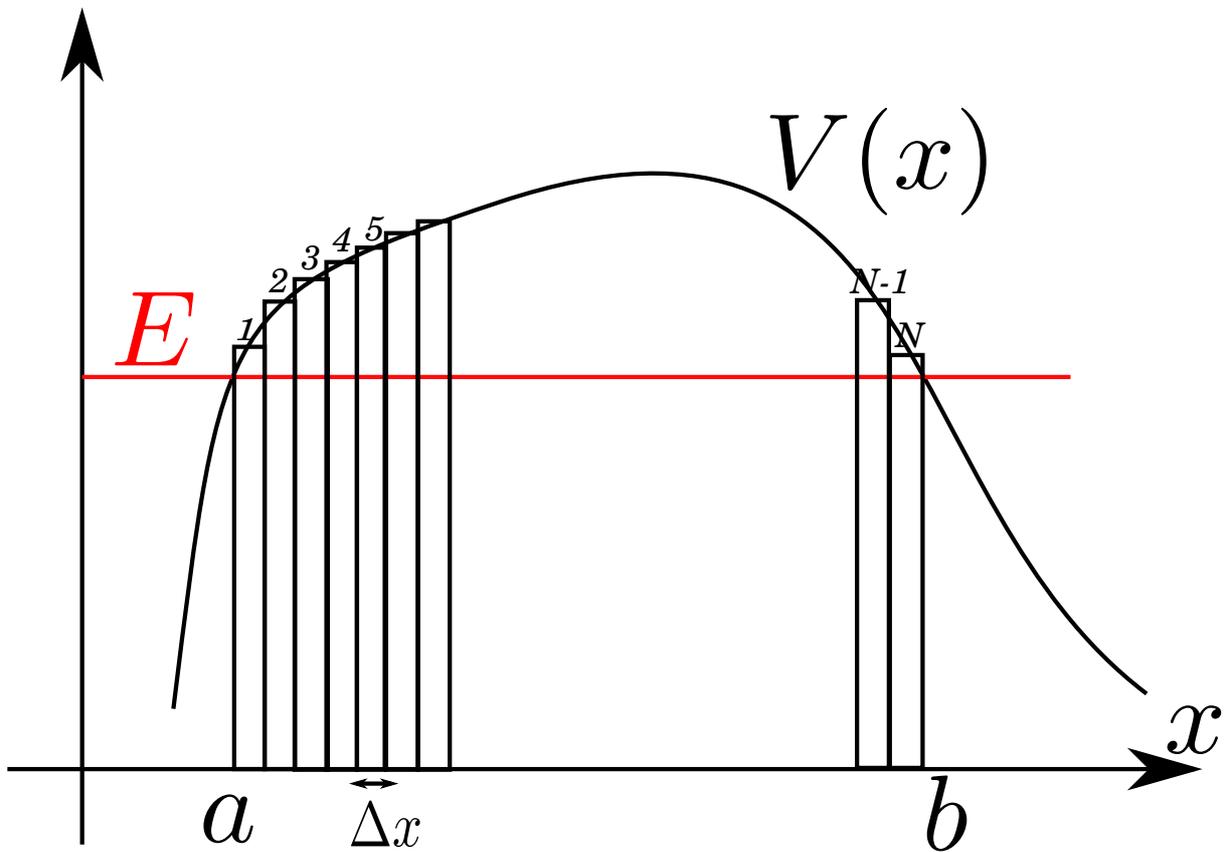


FIGURE 8 – Modélisation d'un barrière de forme quelconque par une série de barrières de profil rectangulaire.

**Interlude calculatoire pour l'effet tunnel**

Les conditions de continuité de  $\phi$  et  $\phi'$  s'écrivent

$$A + B = C + D \quad (1)$$

$$ik_1 A - ik_1 B = -qC + qD \quad (2)$$

$$C e^{-qd} + D e^{qd} = G e^{ik_1 d} \quad (3)$$

$$-qC e^{-qd} + qD e^{qd} = ik_1 G e^{ik_1 d} \quad (4)$$

En éliminant  $B$  entre (1) et (2), on obtient

$$2A = C + D + \frac{q}{ik_1}(D - C) \quad (5)$$

$$2A = C \left(1 - \frac{q}{ik_1}\right) + D \left(1 + \frac{q}{ik_1}\right) \quad (6)$$

En éliminant  $D$  par la combinaison (3) -  $\frac{1}{q}$ (4), on obtient

$$2C e^{-qd} = G e^{ik_1 d} - \frac{ik_1}{q} G e^{ik_1 d} \quad (7)$$

$$C = \frac{G}{2} e^{qd} e^{ik_1 d} \left(1 - \frac{ik_1}{q}\right) \quad (8)$$

De même en éliminant  $C$  par la combinaison (3) +  $\frac{1}{q}$ (4), on trouve

$$D = \frac{G}{2} e^{qd} e^{ik_1 d} \left(1 + \frac{ik_1}{q}\right)$$

On reporte ces expressions de  $C$  et  $D$  dans le membre de droite de (6), ce qui donne

$$2A = \frac{G}{2} e^{qd} e^{ik_1 d} \left(1 - \frac{ik_1}{q}\right) \left(1 - \frac{q}{ik_1}\right) + \frac{G}{2} e^{qd} e^{ik_1 d} \left(1 + \frac{ik_1}{q}\right) \left(1 + \frac{q}{ik_1}\right)$$

d'où

$$\frac{G}{A} = \frac{4e^{-ik_1 d}}{\left(2 + i\left(\frac{q}{k_1} - \frac{k_1}{q}\right)\right) e^{qd} + \left(2 + i\left(\frac{k_1}{q} - \frac{q}{k_1}\right)\right) e^{-qd}}$$