PC* — mathématiques **jeudi 19 septembre 2019**
Devoir surveillé n° 1 **durée : 4 heures**

Quelques questions en vrac

Question 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Question 2. Rappeler sans démonstration le développement limité en 0 de la fonction sinus à l'ordre 5.

Question 3. Rappeler la définition du noyau et de l'image d'une matrice.

Question 4. Rappeler la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme, ainsi que sa caractérisation en termes des dérivées dudit polynôme.

Question 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur le plan P défini par

$$\mathrm{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x - y + 3z = 0\}.$$

Question 6. Énoncer la formule de Leibniz (sur les dérivées successives d'un produit).

Exercice 1. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}(n, p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^p \ \mathrm{d}t$.

a. Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $\mathrm{I}(n, p)$ et $\mathrm{I}(n+1, p-1)$.

b. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, obtenir l'égalité $\mathrm{I}(n, p) = \dfrac{n!\, p!}{(n+p+1)!}$.

c. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer l'égalité

$$\int_{-1}^1 (1+u)^n (1-u)^p \ \mathrm{d}u = 2^{n+p+1}\, \mathrm{I}(n, p).$$

Le résultat de cet exercice pourra être utilisé dans la suite de ce sujet même si on n'a pas réussi à le démontrer.

Exercice 2. Polynômes de Legendre. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les polynômes

$$\mathrm{A}_n = (\mathrm{X}^2 - 1)^n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n \times n!} (\mathrm{A}_n)^{(n)}.$$

Les polynômes de la forme P_n sont les *polynômes de Legendre*

Pour tout polynôme P non nul, on note deg(P) le degré de P et cd(P) le coefficient dominant de P.

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.

2. Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) \ \mathrm{d}t.$$

Montrer qu'on a alors défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n a la parité de n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (\mathrm{X}+1)^k (\mathrm{X}-1)^{n-k}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\mathrm{P}_n(1) = 1$ et déterminer la valeur de $\mathrm{P}_n(-1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$\left((X^2-1)\times(X^2-1)^n\right)^{(n+2)} = \left(\left((X^2-1)^{n+1}\right)'\right)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1-X^2)P_n'' - 2XP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n : t \mapsto (P_n(t))^2 + \frac{1-t^2}{n(n+1)}(P_n'(t))^2.$$

8.a. Étudier les variations de la fonction f_n.

8.b. Pour tout $t \in [-1,1]$, montrer la majoration $|P_n(t)| \leqslant 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer l'égalité

$$(A_n^{(n)}|Q) = (-1)^k(A_n^{(n-k)}|Q^{(k)}).$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

11.a. À l'aide du calcul de la question 9 et de celui de l'exercice 1, calculer $||A_n^{(n)}||^2$.

11.b. Prouver l'égalité $||P_n||^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

11.c. Cette égalité est-elle également valable si n vaut 0 ?

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

12.a. Montrer qu'il existe un unique $(a_{n,0},\ldots,a_{n,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ vérifiant l'égalité

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}P_k.$$

12.b. Préciser l'expression des coefficients $a_{n,k}$ à l'aide du produit scalaire.

12.c. Pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$, montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul.

12.d. Montrer que $a_{n,n}$ est nul.

12.e. En étudiant les coefficients dominants, montrer l'égalité $a_{n,n+1} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

12.f. Évaluer en 1 pour obtenir la valeur de $a_{n,n-1}$.

12.g. Démontrer finalement la formule de récurrence suivante

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}XP_n - \frac{n}{n+1}P_{n-1}.$$

12.h. Calculer ainsi les polynômes P_3, P_4 et P_5.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme P_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 3. Théorème de Taylor-Lagrange. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, *à valeurs réelles.*

1. Le premier objectif de cet exercice est de prouver le *théorème de Taylor-Lagrange*, qui affirme que pour tout couple (a,b) d'éléments distincts de I, il existe c compris strictement entre a et b tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

On fixe donc a et b distincts dans I.

Pour tout λ réel, on définit de I dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$g_\lambda : x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \lambda(b-x)^{n+1}.$$

1.a. Calculer $g_\lambda(b)$.

1.b. Montrer qu'il est possible de choisir λ de sorte que $g_\lambda(a)$ soit nul.

Dans la suite de cette partie, on suppose que λ est choisi ainsi.

1.c. Montrer qu'il existe c compris strictement entre a et b tel que $g'_\lambda(c)$ soit nul.

1.d. Conclure.

2. Dans cette partie, on étudie une fonction définie implicitement.

2.a. Pour tout $x > 0$, montrer l'existence d'un nombre $\theta(x)$ appartenant à $]0,1[$ tel que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\,\theta(x)).$$

On définit ainsi une fonction θ de $]0,+\infty[$ vers $]0,1[$.

2.b. À l'aide d'un développement limité, montrer que la fonction θ possède une limite finie en 0 et préciser la valeur de cette limite.

3. Dans cette partie, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose également que les fonctions f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On pose alors

$$\mathrm{M}_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|\,.$$

3.a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h > 0$. Appliquer le théorème de Taylor-Lagrange pour exprimer $f(x+h)$ et $f(x-h)$, puis, en formant la différence de ces deux nombres, en déduire la majoration

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_0}{h} + \frac{\mathrm{M}_2}{2}h.$$

3.b. En déduire que la fonction f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

On pose alors

$$\mathrm{M}_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|\,.$$

3.c. Démontrer la majoration $\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\,\mathrm{M}_2}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

4.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver la majoration

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|}\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4.b. Montrer que la suite $\left(\dfrac{|x|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang puis en déduire qu'elle converge vers 0.

4.c. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{x^k}{k!}$ est convergente et préciser sa somme.